



**University of
Zurich**^{UZH}

**Zurich Open Repository and
Archive**

University of Zurich
University Library
Strickhofstrasse 39
CH-8057 Zurich
www.zora.uzh.ch

Year: 2008

Quantification pour les paires symétriques et diagrammes de Kontsevich

Cattaneo, A S ; Torossian, C

Abstract: In this article we use the expansion for biquantization described in [7] for the case of symmetric spaces. We introduce a function of two variables $pE(X, Y)$ for any symmetric pairs. This function has an expansion in terms of Kontsevich's diagrams. We recover most of the known results though in a more systematic way by using some elementary properties of this pE function. We prove that Cattaneo and Felder's star product coincides with Rouvière's for any symmetric pairs. We generalize some of Lichnerowicz's results for the commutativity of the algebra of invariant differential operators and solve a long standing problem posed by M. Duflo for the expression of invariant differential operators on any symmetric spaces in exponential coordinates. We describe the Harish-Chandra homomorphism in the case of symmetric spaces by using all these constructions. We develop a new method to construct characters for algebras of invariant differential operators. We apply these methods in the case of p -stable polarizations.

DOI: <https://doi.org/10.24033/asens.2082>

Posted at the Zurich Open Repository and Archive, University of Zurich

ZORA URL: <https://doi.org/10.5167/uzh-13962>

Journal Article

Accepted Version

Originally published at:

Cattaneo, A S; Torossian, C (2008). Quantification pour les paires symétriques et diagrammes de Kontsevich. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 41(4):787-852.

DOI: <https://doi.org/10.24033/asens.2082>

Quantification pour les paires symétriques et diagrammes de Kontsevich

Alberto S. Cattaneo* Charles Torossian†

March 28, 2008

Fonction $E(x, y)$ de type Rouvière, star-produit de Cattaneo-Felder, opérateurs différentiels invariants en coordonnées exponentielles, homomorphisme d'Harish-Chandra et constructions de caractères par les diagrammes de Kontsevich

Résumé: Dans cet article nous appliquons les méthodes de bi-quantification décrites dans [7] au cas des espaces symétriques. Nous introduisons une fonction $E(X, Y)$ définie pour toutes paires symétriques en termes de diagrammes de Kontsevich. Les propriétés de cette fonction permettent de démontrer de manière unifiée des résultats importants dans le cas des paires symétriques résolubles ou quadratiques. Nous montrons que le star-produit décrit dans [7] coïncide pour toute paire symétrique avec celui de Rouvière. On généralise un résultat de Lichnerowicz sur la commutativité d'algèbres d'opérateurs différentiels invariants et on résout un problème de M. Duflo sur l'écriture des opérateurs différentiels invariants sur tout espace symétrique en coordonnées exponentielles. On décrit l'homomorphisme d'Harish-Chandra en terme de diagrammes de Kontsevich. On développe une théorie nouvelle pour construire des caractères des algèbres d'opérateurs différentiels invariants. On applique ces méthodes dans le cas des polarisations σ -stables.

Abstract: In this article we use expansion for biquantization described in [7] for the case of symmetric spaces. We introduce a function of two variables $E(X, Y)$ for any symmetric pairs. This function has an expansion in terms of Kontsevich's diagrams. We recover most of the known results though in a more systematic way by using some elementary properties of this E function.

*Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstr. 190 CH-8057 ZÜRICH, alberto.cattaneo@math.unizh.ch

†New address : Institut Mathématiques de Jussieu, Équipe de Théorie des Groupes, Université Paris 7, Case 7012, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 FRANCE
Previous address : Département de Mathématiques et Applications, ENS, CNRS, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm 75230 Paris cedex 05 FRANCE
Charles.Torossian@ens.fr

We prove that Cattaneo-Felder's star product coincides with Rouvière's for any symmetric pairs. We generalize some of Lichnerowicz's results for the commutativity of the algebra of invariant differential operators and solve a long standing problem posed by M. Duflo for the expression of invariant differential operators on any symmetric spaces in exponential coordinates. We describe the Harish-Chandra homomorphism in the case of symmetric spaces by using all this constructions. We develop a new method to construct characters for algebras of invariant differential operators. We apply these methods in the case of σ -stable polarizations.

AMS Classification: 17B, 17B25, 22E, 53C35.

Acknowledgments : ASC acknowledges partial support of SNF, Grant No. 200020-107444/1. 53D55. and thanks IHES for kind hospitality during the completion of part of this work. This work has been partially supported by the European Union through the FP6 Marie Curie RTN ENIGMA (Contract number MRTN-CT-2004-5652).

ASC and CT thank G. Felder, D. Indelicato, B. Keller and D. Manchon for useful discussions. We thank Jim Stasheff for his comments on the draft version of this paper.

Introduction

Let (\mathfrak{g}, σ) be a symmetric pair: viz., \mathfrak{g} is a finite-dimensional Lie algebra over \mathbb{R} , while σ is an involution and a Lie algebra automorphism of \mathfrak{g} . We denote by $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ the decomposition relative to σ , with \mathfrak{k} and \mathfrak{p} the $+1$ - and -1 -eigenspaces, respectively (*Cartan's decomposition*).

The Poincaré–Birkhoff–Witt (PBW) theorem ensures the following decomposition of the universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$:

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k} \oplus \beta(S(\mathfrak{p}))$$

with β the symmetrization map from $S(\mathfrak{g})$ into $U(\mathfrak{g})$ ¹. One can then identify, as vector spaces, the symmetric algebra $S(\mathfrak{p})$ of \mathfrak{p} with $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}$ via β . Though $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}$ is not an algebra in general, its \mathfrak{k} -invariant subspace $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ is an algebra.

This is of fundamental importance as it is the algebra of invariant differential operators on the symmetric space G/K associated to the symmetric pair (\mathfrak{g}, σ) , and as such it occurs in harmonic analysis on symmetric spaces in a crucial way.

This algebra is commutative [21, 13], and the PBW theorem ensures that

$$\left(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k} \right)^{\mathfrak{k}} \quad \text{and} \quad S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$$

are isomorphic as vector spaces. Observe that $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ is just the associated graded of $\left(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k} \right)^{\mathfrak{k}}$.

It is conjectured that these two algebras are isomorphic *as algebras*, what the second author has called the *polynomial conjecture*. This is a generalization for symmetric pairs of Duflo's isomorphism [12] between the center $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ of the universal enveloping algebra of a Lie algebra \mathfrak{g} and the invariant subalgebra $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ of its symmetric algebra.

Recall that for every homogeneous space G/H the algebra of G -invariant differential operators may be identified, thanks to a result of Koornwinder's [20], with the algebra $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ (where \mathfrak{h} denotes the Lie algebra of H). The latter is not commutative in general. Its associated graded is then a Poisson subalgebra of $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ with a natural Poisson structure.

If \mathfrak{h} admits a complement \mathfrak{q} which is invariant under the adjoint action of \mathfrak{h} , then an easy consequence of PBW is that $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ and

¹We have $\beta(X_1 \dots X_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(n)}$.

$(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^\mathfrak{h}$ are still isomorphic as vector spaces. It is not known whether this holds in general, for there is no natural map from $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^\mathfrak{h}$ to $U(\mathfrak{g})$ (or a quotient thereof).

It has been conjectured anyway by M. Duflo [11] that the center of $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^\mathfrak{h}$ and the Poisson center of $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^\mathfrak{h}$ are always isomorphic as algebras.

Little is known in such generality. In case \mathfrak{g} is a nilpotent Lie algebra, appreciable advances have been achieved in the last few years by Corwin–Greenleaf [10], Fujiwara–Lion–Magneron–Mehdi [14], Baklouti–Fujiwara [5] and Baklouti–Ludwig [6]. In case where G and H are reductive groups, F. Knop [18] gives a satisfying and remarkable answer to the conjecture. In case where H is compact and $G = H \ltimes N$ is the semidirect product of H with a Heisenberg group N , Rybnikov [25] makes use of F. Knop’s result to prove Duflo’s conjecture.

In this paper we propose a novel approach to these questions based on Kontsevich’s construction [19] and its extension to the case of coisotropic submanifolds by Cattaneo and Felder [7], [8]. We only treat the problem of symmetric pairs here, but we think that our methods have a wider scope, namely in the nilpotent homogeneous case.²

One may regard the present work as a link between the methods of deformation quantization and the orbit method in Lie theory.

Plan of the paper: In Section 1 we recall Kontsevich’s construction for the deformation quantization of Poisson manifolds and its extension by Cattaneo and Felder to the case of coisotropic submanifolds. We discuss in details the compatibility in cohomology. This Section should be useful for the Lie algebra experts who are not familiar with the deformation quantization constructions.

Next we study the dependency of this construction on the choice of a complement in the linear case. We show that the reduction spaces are isomorphic and describe the isomorphism (Proposition 2 and Theorem 1) which is an element of the gauge group obtained by solving a differential equation.

In Section 2 we describe the graphs appearing in the linear case and present three fundamental examples of reduction spaces occurring in Lie

²One of our students is working on this case.

theory: symmetric pairs (Proposition 4), Iwasawa's decompositions (Proposition 5), and polarizations (Proposition 6). These examples are new and show that this novel quantization methods are well-suited for Lie theory.

Recall that for symmetric pairs F. Rouvière [27, 28, 30], following Kashiwara and Vergne [17], introduced a mysterious function $e(X, Y)$ defined for $X, Y \in \mathfrak{p}$. Up to conjugation this function computes the star product

$$P \underset{Rou}{\sharp} Q = \beta^{-1} \left(\beta(P) \cdot \beta(Q) \quad \text{modulo} \quad U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k} \right)$$

for P, Q in $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$.

In Section 3 we define a function $E(X, Y)$ for $X, Y \in \mathfrak{p}$ in terms of graphs. This function will behave as Rouvière's function $e(X, Y)$. The comparison of these two functions is a key point of this paper. The function $E(X, Y)$ expresses the Cattaneo–Felder star product \star_{CF} in the case of symmetric pairs. By inspection of the graphs appearing in its construction, we obtain a symmetry property (Lemma 11) together with some additional properties in the solvable case (Proposition 8), in the case of Alekseev–Meinrenken symmetric pairs (Proposition 10) as well as in the case of very symmetric quadratic pairs (Proposition 11). In all these cases we show that the function E is identically equal to 1. This elementary but remarkable properties yield new and uniform proofs of results obtained by Rouvière in the solvable case (Theorem 2, Section 3.4 and Proposition 9) and generalize a theorem by Alekseev and Meinrenken (Theorem 3) in the (anti-invariant) quadratic case. We think that the case of very symmetric quadratic pairs should be related to the Kashiwara–Vergne conjecture for quadratic Lie algebras, but we have not verified this point (cf. discussion in 3.8).

In Section 4 we show that the Cattaneo–Felder and the Rouvière star products coincide (Theorem 4). This is a new result. From this we deduce (Theorem 5) the commutativity for all $z \in \mathbb{R}$ of the algebras $\left(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{z\text{tr}_k} \right)^{\mathfrak{k}}$ of invariant differential operators on z -densities, thus generalizing a result by Duflo [13] and Lichnerowicz [21].

Another problem posed by M. Duflo in [11] is solved in Section 4: the expression in exponential coordinates of invariant differential operators (Theorem 6). Our solution is given in terms of Kontsevich's graphs.

In Section 5 we consider the Harish-Chandra homomorphism for symmetric pairs. Actually there are two natural choices for a complement of \mathfrak{k}^{\perp} , one by Cartan's decomposition and the other by Iwasawa's. We show

that these two choices together lead to the Harish-Chandra homomorphism for general symmetric pairs. In this language the Harish-Chandra homomorphism consists of the restriction to the little symmetric pair in Iwasawa's decomposition. The former decomposition and the intertwining then yield a formula for the Harish-Chandra homomorphism in terms of graphs. It follows from this expression that the Harish-Chandra homomorphism is invariant under the action of the generalized Weyl group. We hope that this formula will allow a resolution of the polynomial conjecture for symmetric pairs.

Finally, in Section 6 we apply the principles of bi-quantization [7] to the case of triplets $f + \mathfrak{b}^\perp, \mathfrak{g}^*, \mathfrak{k}^\perp$, where \mathfrak{b} is a polarization for $f \in \mathfrak{k}^\perp$. These constructions produce characters for the algebras of invariant differential operators (Proposition 19). It is a novel method that we hope will be promising in other situations as well.³

In the case of polarizations in normal position we show, by a homotopy on the coefficients (which makes use of an 8-color form), that the characters are independent of the choice of polarization (Proposition 21). Thus we recover some classical results of the orbit method for Lie algebras.

It follows that for symmetric pairs admitting σ -stable polarizations Rouvière's isomorphism computes the characters of the orbit method (Theorem 7).

One can regard these new methods as a replacement for the orbit method.

³These methods may be applied in certain cases of homogeneous spaces.

Introduction

Soit (\mathfrak{g}, σ) une paire symétrique c'est à dire \mathfrak{g} est une algèbre de Lie (quelconque) de dimension finie sur \mathbb{R} et σ est une involution qui est un automorphisme d'algèbres de Lie. On note alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition relative à σ , avec \mathfrak{k} l'espace propre associé à la valeur propre $+1$ et \mathfrak{p} l'espace propre associé à la valeur propre -1 . Cette décomposition est aussi appelée *décomposition de Cartan*.

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) assure la décomposition de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$:

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k} \oplus \beta(S(\mathfrak{p})),$$

avec β la symétrisation de $S(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})$ ⁴. On peut alors identifier $S(\mathfrak{p})$ l'algèbre symétrique de \mathfrak{p} et $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}$ via la symétrisation β . En général $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}$ n'est pas une algèbre, mais les \mathfrak{k} -invariants $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ forment une algèbre.

Cette algèbre est un objet central car c'est l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur l'espace symétrique G/K associé à la paire symétrique (\mathfrak{g}, σ) . Elle intervient de manière cruciale dans l'analyse harmonique sur les espaces symétriques.

Cette algèbre est commutative [21, 13] et le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt nous assure que

$$\left(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k} \right)^{\mathfrak{k}} \quad \text{et} \quad S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$$

sont isomorphes comme espaces vectoriels. Remarquons que $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ est tout simplement le gradué associé de $\left(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k} \right)^{\mathfrak{k}}$.

On conjecture que ces deux algèbres sont isomorphes *comme algèbres*, ce que le second auteur a nommé la *conjecture polynomiale*. Cette conjecture généralise pour les paires symétriques l'isomorphisme de Duflo pour les algèbres de Lie [12] entre le centre de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ et les invariants dans l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Précisons dans cette introduction que pour un espace homogène G/H quelconque (on note \mathfrak{h} l'algèbre de Lie de H) l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sous l'action de G s'identifie grace à un résultat de Koornwinder [20] à l'algèbre $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$. Cette algèbre n'est pas commutative en général. Son gradué associé est alors une sous-algèbre de Poisson

⁴On a $\beta(X_1 \dots X_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(n)}$.

$(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ (cette dernière possède une structure de Poisson naturelle).

S'il existe un supplémentaire de \mathfrak{h} qui soit invariant sous l'action adjointe de \mathfrak{h} , notons le \mathfrak{q} , alors une conséquence facile de PBW est que $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ et $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ sont encore isomorphes comme espaces vectoriels. En général, on ne sait pas si cette propriété reste vraie, pour la simple raison qu'il n'existe pas d'application naturelle de $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ dans $U(\mathfrak{g})$ (ou un quotient).

On conjecture toutefois que le centre de $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ et le centre de Poisson de $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ sont toujours isomorphes comme algèbres : c'est une conjecture de M. Duflo [11].

Peu de choses sont connues dans cette généralité. Dans le cas où \mathfrak{g} est une algèbre nilpotente, des progrès sensibles ont été faits ces dernières années par Corwin-Greenleaf [10], Fujiwara-Lion-Magneron-Mehdi [14], Baklouti-Fujiwara [5] et Baklouti-Ludwig [6]. Dans le cas où G et H sont des groupes réductifs, F. Knop [18] donne une réponse satisfaisante et remarquable à cette conjecture. Dans le cas où H est compact et $G = H \ltimes N$ est un produit semi-direct de H par un groupe d'Heisenberg N , Rybnikov [25] utilise le résultat de F. Knop pour conclure positivement à la conjecture de Duflo.

Cet article propose une approche nouvelle sur ces questions basée sur la construction de Kontsevich [19] et ses extensions aux cas des sous-variétés co-isotropes par Cattaneo-Felder [7], [8]. Nous abordons ici la problématique des paires symétriques mais nous pensons que nos méthodes ont un champ d'applications plus vaste, notamment dans le cas nilpotent homogène⁵.

On peut voir ce mémoire comme un pont entre les méthodes de quantification par déformation et la méthode des orbites en théorie de Lie.

Résultats détaillés de l'article : La section § 1 rappelle les constructions de quantification de Kontsevich et l'extension au cas des variétés co-isotropes par Cattaneo-Felder. On détaillera l'argumentation sur la compatibilité en cohomologie. Cette section est utile pour les experts en algèbre de Lie qui ne sont pas familiers avec les constructions de quantification par déformation.

On étudie ensuite dans le cas linéaire la dépendance de ces constructions par rapport au choix du supplémentaire. Nous montrons que les espaces de

⁵Un des nos étudiants travaille sur ce cas.

réduction sont isomorphes et nous décrivons l'isomorphisme (proposition 2 et théorème 1) : c'est un élément du groupe de gauge qui s'obtient via la résolution d'une équation différentielle.

Dans la section § 2 on précisera les graphes qui interviennent dans le cas linéaire et on donnera trois exemples fondamentaux d'espaces de réduction que l'on peut rencontrer en théorie de Lie : le cas des paires symétriques (proposition 4), le cas des décompositions d'Iwasawa (proposition 5) et le cas des polarisations (proposition 6). Ces exemples sont nouveaux et démontrent que ces nouvelles méthodes de quantification sont adaptées à la théorie de Lie.

Rappelons que dans une série d'articles F. Rouvière [27, 28, 30] a introduit pour les paires symétriques, suivant les méthodes de Kashiwara-Vergne [17], une fonction mystérieuse $e(X, Y)$ définie pour $X, Y \in \mathfrak{p}$. Cette fonction calcule à une conjugaison près le star-produit :

$$P \underset{Rou}{\sharp} Q = \beta^{-1} \left(\beta(P) \cdot \beta(Q) \quad \text{modulo} \quad U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k} \right)$$

pour P, Q dans $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$.

Dans la section § 3 on définira une fonction $E(X, Y)$ pour $X, Y \in \mathfrak{p}$ en termes de diagrammes, qui aura des propriétés analogues à la fonction $e(X, Y)$ de Rouvière. La comparaison de ces deux fonctions est un point important de cet article. Cette fonction $E(X, Y)$ exprime le star-produit \star_{CF} de Cattaneo-Felder dans le cas des paires symétriques. On déduira, à partir des diagrammes intervenant dans la construction de cette fonction, une propriété de symétrie (lemme 11) et des propriétés supplémentaires dans le cas résoluble (proposition 8), dans le cas des paires symétriques d'Alekseev-Meinrenken (proposition 10) ou le cas très symétrique quadratique (proposition 11). Dans tous ces cas on montre que la fonction E vaut identiquement 1. Ces propriétés remarquables et élémentaires donnent des démonstrations nouvelles et unifiées de résultats démontrés par Rouvière dans le cas résoluble (théorème 2, § 3.4 et proposition 9) et généralisent un théorème d'Alekseev-Meinrenken (théorème 3) dans le cas quadratique (anti-invariant). Nous pensons que le cas des paires très-symétriques quadratiques est en lien avec de la conjecture de Kashiwara-Vergne pour les algèbres de Lie quadratiques, mais nous n'avons pas vérifié ce point (cf. discussion § 3.8).

Dans la section § 4 on montrera que star-produit \star_{CF} de Cattaneo-Felder et celui de Rouvière coïncident (théorème 4). Ce résultat est nouveau. On en déduira (théorème 5) la commutativité pour tout $z \in \mathbb{R}$ des algèbres d'opérateurs différentiels invariants sur les z -densités $\left(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{z\text{tr}_k} \right)^{\mathfrak{k}}$

généralisant ainsi un résultat de Duflo [13] et Lichnerowicz [21].

Un autre problème proposé par M. Duflo dans [11] est résolu en section § 4 : l'écriture en coordonnées exponentielles des opérateurs différentiels invariants (théorème 6). Notre réponse s'exprime en termes de diagrammes de Kontsevich.

Dans la section § 5 on s'intéresse à l'homomorphisme d'Harish-Chandra pour les paires symétriques. En effet il existe deux choix de supplémentaires de \mathfrak{k}^\perp , essentiellement celui donné par la décomposition de Cartan et l'autre donné par la décomposition d'Iwasawa. On montre que ces deux choix conduisent à l'homomorphisme d'Harish-Chandra pour les paires symétriques générales. Dans ce langage l'homomorphisme d'Harish-Chandra consiste en la restriction à la petite paire symétrique dans la décomposition d'Iwasawa. La première décomposition et l'entrelacement donnera alors une formule pour l'homomorphisme d'Harish-Chandra en terme de diagrammes. On en déduit au vu de l'expression que l'homomorphisme d'Harish-Chandra généralisé est invariant par l'action du groupe de Weyl généralisé. On espère que cette formule permettra de résoudre la conjecture polynomiale pour les paires symétriques.

Enfin dans la dernière section § 6 de cet article on appliquera le principe de bi-quantification [7] au cas des triplets $f + \mathfrak{b}^\perp, \mathfrak{g}^*, \mathfrak{k}^\perp$ où \mathfrak{b} est une polarisation pour $f \in \mathfrak{k}^\perp$. Ces constructions fournissent des caractères pour les algèbres d'opérateurs différentiels invariants (proposition 19). C'est une nouvelle méthode, que l'on espère prometteuse dans d'autres situations ⁶.

Dans le cas où les polarisations sont en position d'intersections normales on montre, par une méthode d'homotopie sur les coefficients (faisant intervenir une forme à 8-couleurs), que les caractères sont indépendants du choix des polarisations (proposition 21). On retrouve ainsi des résultats classiques de la méthode des orbites dans le cas des algèbres de Lie.

On en déduit pour les paires symétriques qui admettent des polarisations σ -stable que l'isomorphisme de Rouvière calcule les caractères de la méthode des orbites (théorème 7).

On peut voir ces nouvelles méthodes comme un substitut à la méthode des orbites.

⁶Ces méthodes s'appliquent dans certains cas d'espaces homogènes.

Table des matières

1	Rappels sur la construction de Cattaneo-Felder	13
1.1	Quantification	13
1.2	Construction en terme de transformée de Fourier	13
1.3	Construction en termes de diagrammes de Feynman	16
1.3.1	Description des fonctions d'angles	17
1.3.2	Diagrammes et opérateurs différentiels associés	17
1.3.3	Construction du L^∞ quasi-isomorphisme	18
1.4	Cas des bi-vecteurs de Poisson et cas linéaire	19
1.4.1	Cas des bi-vecteurs de Poisson	19
1.4.2	Cas linéaire	20
1.5	Dépendance par rapport au choix du supplémentaire	23
1.5.1	Action du champ de vecteurs	23
1.5.2	Dépendance par rapport au supplémentaire	26
1.5.3	Entrelacement des espaces de cohomologie	29
1.6	Bi-quantification	31
1.6.1	Définition de la fonction d'angle à 4-couleurs	31
1.6.2	Diagrammes à 4-couleurs	33
1.6.3	Définition de l'espace de réduction de deuxième espèce de l'intersection $C_1 \cap C_2$	33
1.6.4	Définition de la structure de bi-module	34
1.6.5	Compatibilité en cohomologie	35
2	Exemples d'espaces de réduction	38
2.1	Cas des paires symétriques	38
2.2	Cas linéaire pour les fonctions	39
2.3	Cas linéaire pour les poly-vecteurs	42
2.4	Cas Iwasawa	43
2.4.1	Décomposition d'Iwasawa généralisée	43
2.4.2	Espace de réduction	44
2.5	Cas des polarisations	47
3	Fonction $E(X, Y)$ pour les paires symétriques	48
3.1	Définition de la fonction $E(X, Y)$ pour les paires symétriques	48
3.2	Contributions dans $E(X, Y)$	50
3.3	Cas résoluble	52
3.4	Propriétés supplémentaires	53
3.5	Calculs numériques des premiers termes dans $E(X, Y)$	53
3.5.1	Composante sur \mathfrak{k}	53
3.5.2	Composante scalaire	55
3.6	Cas quadratique	60
3.6.1	Cas des paires d'Alekseev-Meinrenken	60
3.6.2	Cas quadratique σ -invariant	61

3.7	Équation différentielle d'évolution pour le fonction E	61
3.7.1	Cas des algèbres de Lie	61
3.7.2	Cas des paires symétriques	63
3.7.3	Equation d'évolution dans l'algèbre de Weyl	64
3.8	Problèmes non résolus	66
4	Opérateurs différentiels invariants	67
4.1	Liens entre les produits de Rouvière et de Cattaneo-Felder . .	67
4.1.1	Produit de Duflo-Kontsevich	67
4.1.2	Roues horizontales et verticales	67
4.1.3	Comparaison des star-produits \sharp_{Rou} et \star_{CF}	69
4.2	Cas à paramètre	71
4.2.1	Commutativité d'algèbres d'opérateurs différentiels in- variants sur les z -densités	71
4.2.2	Comparaison des fonctions $E(X, Y)$ et $e(X, Y)$	73
4.3	Opérateurs différentiels en coordonnées exponentielles	73
5	Homomorphisme d'Harish-Chandra	78
5.1	Diagramme d'Harish-Chandra et espaces de réduction	78
5.2	Espace de réduction vertical	79
5.3	Espace de réduction horizontal	80
5.3.1	Equations de réduction	80
5.3.2	Description du produit $\star_{\mathfrak{p}_o + \mathfrak{n}_+}$	82
5.4	Entrelacement et projection	83
5.5	L'homomorphisme d'Harish-Chandra en termes de graphes .	86
5.5.1	Calcul de l'élément de gauge	87
5.5.2	Etude de l'opérateur l'opérateur $(DU_\pi(v))_0$	89
5.5.3	Coefficients de Taylor	92
6	Construction de caractères	94
6.1	Construction de caractères	94
6.2	Indépendance par rapport aux choix de la polarisation . . .	95
6.2.1	Construction de la forme à 8-couleurs	95
6.2.2	Polarisations en position d'intersection normale	98
6.3	Applications au cas des polarisations σ -stable	100
6.3.1	Exemples classiques	100
6.3.2	Indépendance du caractère	100
6.3.3	Isomorphisme de Rouvière	101
	Table des figures	104
	Bibliographie	106

1 Rappels sur la construction de Cattaneo-Felder

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie sur \mathbb{R} . L'espace dual \mathfrak{g}^* est alors muni d'une structure de Poisson linéaire. On note π le bi-vecteur de Poisson associé.

Supposons donnée $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ sous-algèbre de \mathfrak{g} . Son orthogonal \mathfrak{h}^\perp est alors une sous-variété coisotrope de \mathfrak{g}^* . Dans [7], Cattaneo-Felder décrivent une construction pour une quantification de $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ ou d'une sous-algèbre.

1.1 Quantification

Les constructions ne sont pas intrinsèques et dépendent du choix d'un supplémentaire de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} . Notons \mathfrak{q} un tel supplémentaire. On peut alors identifier \mathfrak{h}^* avec \mathfrak{q}^\perp .

Deux constructions sont données par Cattaneo et Felder, l'une en termes de série de type Feynman avec diagrammes colorés et l'autre en terme de transformée de Fourier partielle. Ces constructions sont locales mais on peut les globaliser. On va rappeler ces dernières dans le cadre qui nous intéresse à savoir le cas des sous-algèbres, mais il suffira de remplacer \mathfrak{h}^\perp par une sous-variété C pour obtenir la construction plus générale.

Rappel des constructions : La variété qui intervient dans cette construction est une super-variété :

$$M := \mathfrak{h}^\perp \oplus \Pi \mathfrak{h}$$

où Π désigne le foncteur de changement de parité. L'algèbre des fonctions est donc

$$\mathcal{A} := \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge (\mathfrak{g}^*/\mathfrak{h}^\perp) \simeq \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge \mathfrak{h}^*.$$

Si $C = \mathfrak{h}^\perp$, la fibre du fibré normal N_C vaut alors $\mathfrak{g}^*/\mathfrak{h}^\perp$, celle du fibré co-tangent (conormal) $T_C^\perp = N_C^*$ vaut \mathfrak{h} .

1.2 Construction en terme de transformée de Fourier

La dg-algèbre des poly-champs sur M est l'algèbre symétrique shiftée de l'algèbre des dérivations de \mathcal{A}

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = S_{\mathcal{A}}(Der(\mathcal{A})[-1])[1].$$

Par transformée de Fourier dans la fibre impaire (cf. plus loin) cette dg-algèbre est isomorphe à l'algèbre des poly-champs de vecteurs formels le long de \mathfrak{h}^\perp , c'est à dire

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}) = S_{\mathcal{B}}(\text{Der}(\mathcal{B})[-1])[1]$$

avec $\mathcal{B} = \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^\perp) \otimes S((\mathfrak{g}^*/\mathfrak{h}^\perp)^*) = \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^\perp) \otimes S(\mathfrak{h})$ l'algèbre des fonctions polynomiales dans la fibre sur

$$\widehat{M} := \mathfrak{h}^\perp \oplus \mathfrak{g}^*/\mathfrak{h}^\perp.$$

En d'autres termes, une fois que l'on a fixé un voisinage tubulaire de \mathfrak{h}^\perp , on peut identifier un voisinage de \mathfrak{h}^\perp avec le fibré normal et $\mathfrak{g}^*/\mathfrak{h}^\perp$ avec un supplémentaire de \mathfrak{h}^\perp .

Les fonctions au voisinage de \mathfrak{h}^\perp s'identifient avec leur développement de Taylor partiel dans la direction normale, c'est à dire des éléments de \mathcal{B} . L'algèbre $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ s'identifie alors aux poly-champs de vecteurs formels⁷ le long de \mathfrak{h}^\perp .

Le théorème de Formalité [19], nous dit que la dg-algèbre $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ est L^∞ quasi-isomorphe à la dg-algèbre $\mathcal{D}_{poly}(\mathcal{A})$. En combinant la transformée de Fourier et le théorème de Formalité dans le cas des super-espaces, Cattaneo-Felder obtiennent :

Théorème (Cattaneo-Felder [8]) *La dg-algèbre des poly-champs de vecteurs formels le long de \mathfrak{h}^\perp est L^∞ quasi-isomorphe à la dg-algèbre $\mathcal{D}_{poly}(\mathcal{A})$.*

Si on dispose d'une solution de l'équation de Maurer-Cartan sur \mathfrak{g}^* alors on disposera d'une solution de Maurer-Cartan sur M par transformée de Fourier puis d'une solution de Maurer-Cartan dans $\mathcal{D}_{poly}(\mathcal{A})$, c'est à dire en général (cf. plus loin) d'une A_∞ -structure sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge \mathfrak{h}^*$.

Cas des paires symétriques : Dans le cas des paires symétriques le supplémentaire \mathfrak{p} étant canonique, on dispose des équations suivantes :

Notons $(K_i)_i$ une base de \mathfrak{k} , $(P_j)_j$ une base de \mathfrak{p} . On note $(K_i^*)_i, (P_j^*)_j$ la base duale. On identifie \mathfrak{k}^\perp et \mathfrak{p}^* . On identifie de même $\mathfrak{g}^*/\mathfrak{k}^\perp = \mathfrak{k}^*$ et \mathfrak{p}^\perp . On note Π le changement de parité. La super-variété étant

$$M := \mathfrak{k}^\perp \oplus \Pi \mathfrak{k} = \mathfrak{p}^* \oplus \Pi \mathfrak{k}$$

⁷On entend par poly-champs de vecteurs dans un voisinage formel de \mathfrak{h}^\perp une complétion des $\mathcal{V}(\mathfrak{g}^*)/I_{\mathfrak{h}^\perp}$ où $\mathcal{V}(\mathfrak{g}^*)$ désigne les poly-champs de vecteurs sur \mathfrak{g}^* et $I_{\mathfrak{h}^\perp}$ désigne les poly-champs avec développement de Taylor nul sur \mathfrak{h}^\perp .

on aura

$$\widehat{M} := \mathfrak{k}^\perp \oplus \mathfrak{g}^*/\mathfrak{k}^\perp = \mathfrak{p}^* \oplus \mathfrak{k}^*.$$

On notera $\theta_i := \Pi K_i^*$ les fonctions de coordonnées sur $\Pi\mathfrak{k}$. La dérivée dans la direction K_i^* sera notée $\partial_{K_i^*}$; c'est un champ de vecteurs constants sur \widehat{M} . De même la dérivée dans la direction ΠK_i sera notée $\partial_{\Pi K_i}$; c'est un champ de vecteurs constants sur M .

La transformée de Fourier (avec changement parité) change la dérivée $\partial_{K_i^*}$ (c'est un champ de degré impair de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$) en la fonction $\theta_i = \Pi K_i^*$ (c'est une variable impaire de \mathcal{A}). De même K_i fonction de coordonnée sur \widehat{M} (variable paire de \mathcal{B}) est changée en $\partial_{\Pi K_i}$ (variable paire de $\mathcal{T}(\mathcal{A})$).

Le bi-vecteur de Poisson sur \mathfrak{g}^* associé à la structure de Poisson, s'écrit concrètement :

$$\pi = [K_i, K_j] \partial_{K_i^*} \wedge \partial_{K_j^*} + [P_i, P_j] \partial_{P_i^*} \wedge \partial_{P_j^*} + 2[K_i, P_j] \partial_{K_i^*} \wedge \partial_{P_j^*}.$$

Sa transformée de Fourier partielle, notée $\hat{\pi}$, est somme de champs de vecteurs et d'un 3-vecteurs sur la variété $\mathfrak{k}^\perp \oplus \Pi\mathfrak{k}$:

$$\hat{\pi} = \theta_i \theta_j \partial_{\Pi[K_i, K_j]} + 2[K_i, P_j] \theta_i \partial_{P_j^*} + \partial_{P_i^*} \wedge \partial_{P_j^*} \wedge \partial_{\Pi[P_i, P_j]}.$$

Comme on le constate pour les paires symétriques la variété $\mathfrak{k}^\perp \oplus \Pi\mathfrak{k}$ ne porte pas de structure de Poisson (car $\hat{\pi}$ n'est pas un 2-vecteurs), mais une structure vérifiant l'équation de Maurer-Cartan homogène si on tient compte de tous les degrés impairs dans $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, c'est à dire les variables θ_i et $\partial_{P_i^*}$.

Remarque 1 : La partie 1-champ de $\hat{\pi}$, est clairement associée à la paire symétrique dégénérée (abélianisée, id. on a $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = 0$) produit semi-direct de \mathfrak{k} et \mathfrak{p} :

$$\mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{p}.$$

Ce 1-champ est de carré nul. Compte tenu de la graduation on peut voir la paire symétrique comme une déformation de la partie abélianisée. Si on considère la structure déformée formelle $[x, y] = t^2[x, y]$ pour $x \in \mathfrak{p}$ et $y \in \mathfrak{p}$ (les autres crochets restant inchangés) on trouverait

$$\hat{\pi}_t = \theta_i \theta_j \partial_{\Pi[K_i, K_j]} + 2[K_i, P_j] \theta_i \partial_{P_j^*} + t^2 \partial_{P_i^*} \wedge \partial_{P_j^*} \wedge \partial_{\Pi[P_i, P_j]}.$$

Pour $t = 0$ on retrouve la paire symétrique abélianisée.

Remarque 2 : L'utilisation de la transformée de Fourier impaire est bien connue pour les algèbres Lie, quand on considère $\Pi\mathfrak{g}$ muni du 1-champ impair quadratique

$$Q = \xi_i \xi_j \partial_{\Pi[e_i, e_j]}$$

vérifiant $Q^2 = \frac{1}{2}[Q, Q] = 0$. On peut alors appliquer la quantification de Kontsevich dans ce contexte. Les formules de Kontsevich sont plus simples et on peut par exemple décrire de manière plus naturelle le L^∞ quasi-isomorphisme tangent qui, par l'argument d'homotopie, réalisera dans le cas des algèbres de Lie, l'isomorphisme de Duflo généralisé

$$H(\mathfrak{g}, S(\mathfrak{g})) \underset{\text{algèbre}}{\sim} H(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g})).$$

Cette méthode a été expérimentée par Shoikhet [31] (voir aussi [24]).

Remarque 3 : Le L^∞ morphisme, agit aussi sur les poly-champs dont la restriction à \mathfrak{h}^\perp est nulle sur $\bigwedge \mathfrak{h}$, c'est à dire les poly-champs de vecteurs dont la restriction est nulle sur la puissance extérieure du fibré conormal ; ce sont les poly-vecteurs dits relatifs ; par exemple le bi-vecteur de Poisson π vérifie cette propriété (voir [7]).

1.3 Construction en termes de diagrammes de Feynman

La formule proposée est semblable à celle de Kontsevich [19] dans \mathbb{R}^n . Elle fait intervenir des diagrammes numérotés et des coefficients obtenus par intégration de formes différentielles sur des variétés de configurations dans le demi-plan de Poincaré et des opérateurs poly-différentiels associés à ces diagrammes ⁸.

La construction proposée dans [7] est locale (mais peut être globalisée [8]). On traite ici le cas où la sous-variété coisotrope C vaut \mathfrak{h}^\perp , mais cette construction se généralise sans peine au cas des sous-variétés quelconques.

⁸On pourra consulter les références [4], [9] pour une description détaillée de la construction de Kontsevich.

1.3.1 Description des fonctions d'angles

Les diagrammes de Kontsevich vont être colorés en fonction de la variable de dérivation associée dans l'opérateur.

Si la variable est dans \mathfrak{h}^\perp (variable tangente) la fonction d'angle associée est la même que dans le cas classique c'est à dire une fonction définie sur les configurations de deux points dans le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}z > 0\}$. On a donc pour $p, q \in \mathcal{H}$:

$$\overrightarrow{\phi}(p, q) = \underset{p}{\bullet} \longrightarrow \underset{q}{\bullet} = \arg(p - q) + \arg(p - \bar{q}).$$

Si la variable est dans $\mathfrak{g}^*/\mathfrak{h}^\perp = \mathfrak{h}^*$ (variable normale; on a besoin ici de faire un choix d'un supplémentaire de \mathfrak{h} , pour identifier \mathfrak{h}^* à un sous-espace de \mathfrak{g}^*) alors la fonction d'angle sera notée \dashrightarrow (en pointillé dans les diagrammes). On a donc pour $p, q \in \mathcal{H}$:

$$\dashrightarrow \phi(p, q) = \underset{p}{\bullet} \dashrightarrow \underset{q}{\bullet} := \arg(q - p) + \arg(q - \bar{p}) = \overrightarrow{\phi}(q, p).$$

Définition 1. Pour les variables tangentes la fonction d'angle vaut :

$$d\phi_+(p, q) := d\overrightarrow{\phi}(p, q) := d\arg(p - q) + d\arg(p - \bar{q})$$

et pour les variables normales la fonction d'angle vaut :

$$d\phi_-(p, q) := d\dashrightarrow \phi(p, q) := d\arg(p - q) - d\arg(p - \bar{q}).$$

1.3.2 Diagrammes et opérateurs différentiels associés

Les diagrammes qui vont intervenir sont similaires à la construction de Kontsevich avec la différence essentielle suivante : les arêtes sont colorées comme dans la définition 1 ci-dessus. Remarquons qu'aux variables dans \mathfrak{h}^* sont associées des fonctions d'angles qui ne s'annulent pas si le sommet p est sur l'axe réel. Par conséquent les diagrammes Γ de Kontsevich admettront des arêtes partant de l'axe réel si ces arêtes sont colorées par \mathfrak{h}^* .

A contrario il est autorisé de faire sortir des arêtes colorées par \mathfrak{h}^* du diagramme (on dira que ces arêtes vont à l'infini) ; ces arêtes ne contribuent pas dans le calcul du coefficient w_Γ . Ce coefficient correspond, comme dans le cas classique, à l'intégrale de la forme différentielle associée aux arêtes restantes, sur l'espace de configurations (des points aériens et terrestres modulo l'action du groupe des homothéties-translation). Par contre les arêtes qui partent à l'infini contribuent dans la définition de l'opérateur B_Γ .

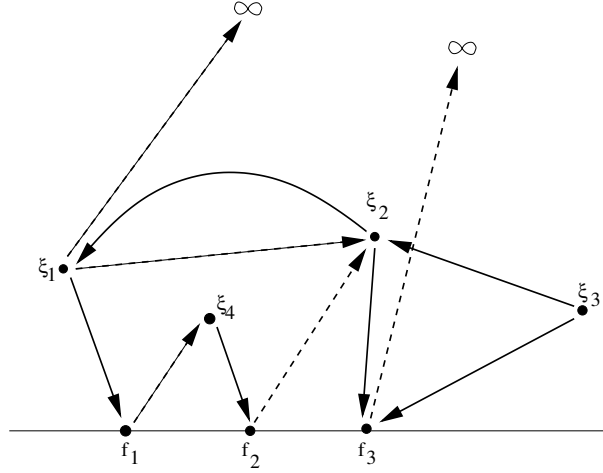


FIG. 1 – Graphe type intervenant dans le calcul de \mathcal{U}_4

On dispose sur les sommets terrestres du graphe Γ des éléments f_1, \dots, f_p de $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge \mathfrak{h}^*$. Les poly-vecteurs ξ_1, \dots, ξ_n définis dans le voisinage formel de \mathfrak{h}^\perp , sont placés aux sommets aériens de Γ ⁹.

Ces données définissent comme dans la construction de Kontsevich un opérateur poly-différentiel $B_\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge \mathfrak{h}^*$:

$$B_\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_n) : (f_1, \dots, f_p) \mapsto B_\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_n)(f_1, \dots, f_p).$$

1.3.3 Construction du L^∞ quasi-isomorphisme

On notera

$$\mathcal{U}_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{\Gamma} w_\Gamma B_\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

la contribution de tous les graphes avec n sommets aériens sur lesquels on a placé les poly-vecteurs ξ_1, \dots, ξ_n et un nombre quelconque de sommets

⁹On appliquera cette construction en plaçant le bivecteur de Poisson linéaire π aux sommets aériens.

terrestres.

Remarquons que pour avoir un coefficient w_Γ non nul, il faut que le nombre d'arêtes dans le graphe (hormis celle qui partent à l'infini) soit égal à $2n + p - 2$. Contrairement au cas non coloré, l'opérateur $\mathcal{U}_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ n'est pas homogène dans la graduation de Hochschild, car la diminution du nombre d'arguments peut être compensée par l'augmentation du degré en \mathfrak{h}^* .

Pour $n = 0$ il faut $p = 2$ pour avoir une variété de configurations de dimension nulle. On retrouve la multiplication dans $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge \mathfrak{h}^*$.

Théorème : (Cattaneo-Felder) *La somme $\mathcal{U} = \sum \frac{1}{n!} \mathcal{U}_n$ définit un L^∞ quasi-isomorphisme de la dg-algèbre des poly-champs de vecteurs formels dans un voisinage de \mathfrak{h}^\perp dans $\mathcal{D}_{poly}(\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge \mathfrak{h}^*)$.*

Comme dans le cas classique c'est la formule de Stokes qui fournit l'équation du L^∞ quasi-isomorphisme.

1.4 Cas des bi-vecteurs de Poisson et cas des bi-vecteurs de Poisson linéaires

1.4.1 Cas des bi-vecteurs de Poisson

Lorsqu'on applique la construction précédente dans le cas où les poly-vecteurs ξ_i sont égaux à un 2-vecteurs de Poisson, on trouve un opérateur polydifférentiel formel non homogène du complexe de Hochschild. Mais cet opérateur est homogène de degré 1 si l'on tient compte des degrés impairs.

Dans cas des variétés de Poisson, étudié dans [19], l'opérateur est de degré 1 dans le complexe de Hochschild, c'est donc un produit associatif. Ici la situation est plus compliquée.

En d'autres termes, comme la graduation tient compte du degré dans les variables impaires, la structure obtenue est en fait une A_∞ -structure sur l'espace $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge \mathfrak{h}^*$ avec premier terme non nul *a priori*, c'est à dire une structure

$$\mu = \mu_{-1} + \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \dots$$

vérifiant $\frac{1}{2}[\mu, \mu]_{GH} = 0^{10}$ ou en terme de bar-construction $\bar{\mu} \circ \bar{\mu} = 0$ où $\bar{\mu}$ désigne la codérivation de l'algèbre tensorielle associée à μ .

¹⁰On note $[\bullet, \bullet]_{GH}$ le crochet de Gerstenhaber

A priori il existe des composantes en tout degré (de Hochschild mais ces composantes sont homogènes de degré 1 si l'on tient compte de la graduation $\bigwedge \mathfrak{h}^*$); on a donc en général :

- Une composante μ_{-1} , que l'on note aussi F_π (degré -1 dans le complexe de Hochschild, c'est à dire un élément de \mathcal{A}) qui ne prend pas d'argument : c'est une sorte de courbure.
- Une composante μ_0 qui ne prend qu'un argument que l'on note aussi A_π (degré 0 dans le complexe de Hochschild, c'est à dire un opérateur différentiel formel sur \mathcal{A}) : c'est presque une différentielle.
- Une composante μ_1 qui prend deux arguments que l'on note aussi B_π (degré 1 dans le complexe de Hochschild, c'est à dire un opérateur bi-différentiel formel sur \mathcal{A}) : c'est presque un produit (associatif).
- etc...

On écrit alors :

$$\mu = F_\pi + A_\pi + B_\pi + B_2 + \dots$$

Faisons l'inventaire des arêtes : Un graphe avec n sommets aériens et p points terrestres produit $2n$ arêtes pour une dimension de variété de configurations $2n + p - 2$. Il faut donc disposer sur l'axe réel p poly-vecteurs fournissant au moins $p - 2$ arêtes. Si au total on a plus de $2n + p - 2$ arêtes, alors il faut faire sortir à l'infini le nombre adéquat d'arêtes, colorées par \mathfrak{h}^* .

Dans le cas de $p = 0$ il faut donc 2 arêtes sortantes, donc F_π est un 2-vecteurs. On remarquera que F_π est alors de degré $1 = -1 + 2$. C'est une sorte de courbure.

Toutefois si $F_\pi = 0$, alors A_π sera une différentielle vérifiant $[A_\pi, B_\pi]_{GH} = 0$ et on aura l'équation¹¹

$$[B_\pi, B_\pi]_{GH} + 2[B_2, A_\pi]_{GH} = 0$$

avec B_2 la composante de degré 2 (qui prend 3 arguments). En conséquence B_π sera un produit associatif dans l'espace de cohomologie défini par A_π .

1.4.2 Cas linéaire

On se place dorénavant dans le cas où le 2-vecteurs de Poisson placé aux sommets aériens vaut π le bivecteur de Poisson linéaire associé à l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . On suppose toujours que \mathfrak{h} est une sous-algèbre. Toutes les constructions se restreignent à l'algèbre des fonctions polynomiales notée $C_{poly}(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge \mathfrak{h}^*$.

¹¹On fera attention que l'on n'a pas $[B_2, A_\pi]_{GH} = -[A_\pi, B_2]_{GH}$, car il faut tenir compte de la graduation des coefficients, on a donc $[B_2, A_\pi]_{GH} = [A_\pi, B_2]_{GH}$.

Nullité de la courbure :

Lemme 1. *Dans le cas linéaire, pour toute sous-algèbre \mathfrak{h} , on a $F_\pi = 0$*

Preuve : On doit avoir $2n - 2$ arêtes dans le diagramme mais on ne dispose que de n sommets à dériver. On doit donc avoir par linéarité de π , $2n - 2 \leq n$ c'est à dire $n = 1$ ou $n = 2$.

– Si $n = 1$ la restriction de π à $\Lambda^2 \mathfrak{h}$ est nul si et seulement si \mathfrak{h} est une sous-algèbre (on retrouve la condition co-isotropie de la variété $C = \mathfrak{h}^\perp$).

– Si $n = 2$ les diagrammes qui interviennent sont comme dans Fig. 2 car le 2-vecteurs est linéaire. Dans ce cas le coefficient est nul, car on a une arête double ou deux arêtes qui se suivent¹². ■

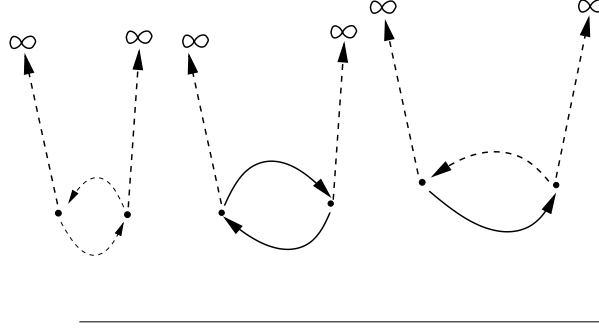


FIG. 2 – Graphe intervenant dans le calcul F_π

Déformation de la différentielle de Cartan-Eilenberg : Il existe une graduation liée au nombre de sommets aériens dans les diagrammes de Kontsevich. On note ϵ le paramètre de graduation ; cela revient à changer π en $\epsilon\pi$ dans les formules.

Lemme 2. *Le terme A_π est une différentielle. On a $A_\pi = \epsilon d_{CE} + o(\epsilon)$ avec d_{CE} la différentielle de Cartan-Eilenberg de \mathfrak{h} agissant dans le \mathfrak{h} -module $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{h} = S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \mathcal{C}_{poly}(\mathfrak{h}^\perp)$.*

Preuve : Pour $n = 1$ les seuls graphes qui interviennent sont comme dans Fig. 3. Pour $\phi \in \mathcal{C}_{poly}(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge^* \mathfrak{h}^*$ de degré $q - 1$ les graphes dessinés à gauche

¹²Remarquons que pour $n = 1$ ou $n = 2$ les contributions sont toujours nulles dans F_π , même si π n'est pas linéaire.

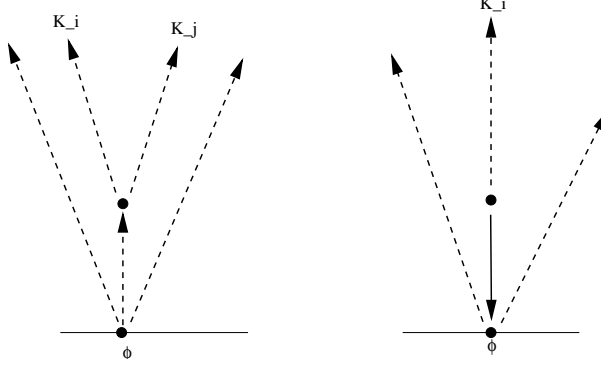


FIG. 3 – Graphe intervenant dans le calcul A_π à l'ordre 1

contribuent comme

$$\sum_{i < j} (-1)^{i+j} \phi([K_i, K_j], K_1, \dots, \hat{K}_i, \dots, \hat{K}_j, \dots, K_q)$$

et les graphes dessinés à droite contribuent pour

$$\sum_i (-1)^{i+1} \text{ad} K_i (\phi(K_1, \dots, \hat{K}_i, \dots, K_q)).$$

On reconnaît la différentielle de Cartan-Eilenberg. ■

Définition 2. On note $H_\epsilon^\bullet(\mathfrak{h}^\perp)$ l'espace de cohomologie de réduction formelle pour le différentielle A_π agissant dans $\mathcal{C}_{poly}(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge \mathfrak{h}^*$. L'espace $H_\epsilon^0(\mathfrak{h}^\perp)$ sera appelé l'espace de réduction.

Pour $f \in H_\epsilon^\bullet(\mathfrak{h}^\perp)$ on a $f = f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 \dots$. Le premier terme f_0 est dans l'espace de cohomologie relative

$$H_{CE}^\bullet(\mathfrak{h}, S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}))$$

car on a d'après le lemme précédent

$$A_\pi = \epsilon d_{CE} + o(\epsilon).$$

Toutefois, en général on ne peut pas dire que $H_\epsilon^\bullet(\mathfrak{h}^\perp)$ est une déformation de $H^\bullet(\mathfrak{h}, S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}))$ car l'application $f \mapsto f_0$ n'est pas *a priori* surjective.

En particulier pour $f \in H_\epsilon^0(\mathfrak{h}^\perp)$ c'est à dire une fonction $f = f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 \dots$ dans $\mathcal{C}_{poly}(\mathfrak{h}^\perp)[[\epsilon]]$ solution de $A_\pi(f) = 0$, on aura $f_0 \in S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^\mathfrak{h}$. L'application $f \mapsto f_0$ n'est pas surjective *a priori* et on ne pourra pas

considérer $H_\epsilon^0(\mathfrak{h}^\perp)$ comme une déformation de l'espace $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^\mathfrak{h}$. C'est toutefois le cas pour les paires symétriques et plus généralement lorsque \mathfrak{h} admet un supplémentaire \mathfrak{h} -invariant (cf. proposition 4).

Structure associative en cohomologie : La courbure étant nulle dans notre situation linéaire, l'équation générale

$$[B_\pi, B_\pi]_{GH} + 2[B_2, A_\pi]_{GH} = 0$$

montre que B_π définit un produit associatif en cohomologie. Cette formule résulte de la formule de Stokes avec 3 points sur l'axe réel, il faut tenir compte des strates de bord qui contiennent tout le chemin : cette strate fournit un co-bord pour la différentiel A_π . Donc ce n'est qu'en cohomologie que ces formules fournissent un produit associatif. On a donc la proposition suivante¹³

Proposition 1. *Dans le cas linéaire, B_π définit un produit associatif dans $H_\epsilon^\bullet(\mathfrak{h}^\perp)$.*

1.5 Dépendance par rapport au choix du supplémentaire

On examine dans le cas du bi-vecteur de Poisson linéaire associé à \mathfrak{g} , la dépendance du produit associatif de la proposition 1 par rapport au choix du supplémentaire.

On note encore π le bi-vecteur de Poisson linéaire associé à \mathfrak{g} et on considère encore \mathfrak{h} une sous-algèbre de \mathfrak{g} .

1.5.1 Action du champ de vecteurs

On fixe une base $(K_i)_i$ de \mathfrak{h} . Fixons un supplémentaire \mathfrak{q}_o de \mathfrak{h} . On fixe une base $(P_a)_a$ de \mathfrak{q}_o , ce qui permet de considérer $(P_a^*)_a$ base de \mathfrak{h}^\perp .

Faisons choix d'un autre supplémentaire \mathfrak{q}_1 dont on fixe une base $(Q_a)_a$ et ce qui permet de considérer $(Q_a^*)_a$. On suppose que l'on a $P_a^* = Q_a^*$, *id* on a $P_a - Q_a \in \mathfrak{h}$.

Notons $\mu_{\mathfrak{q}_o}$ et $\mu_{\mathfrak{q}_1}$ les structures A_∞ construites pour ces choix de supplémentaires. On note \mathcal{A} l'algèbre des fonctions polynomiales sur la super-variété $\mathfrak{h}^\perp \oplus \Pi\mathfrak{h}$:

$$\mathcal{A} := \mathcal{C}_{poly}(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge (\mathfrak{g}^*/\mathfrak{h}^\perp) \simeq \mathcal{C}_{poly}(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge \mathfrak{h}^*.$$

¹³Si π est un bi-vecteur quelconque cette proposition est encore vraie dès que l'on a $F_\pi = 0$ (cf. [7])

Changer de supplémentaire revient à faire un changement de coordonnées linéaires sur \mathfrak{g} . La matrice de changement de bases de (K_i, P_a) vers (K_i, Q_a) a la forme suivante :

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} Id & \mathbb{D} \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

Notons $\mathbb{D} = [V_1, \dots, V_p]$ les colonnes de la matrice \mathbb{D} et $V_i \in \mathfrak{h}$.

Par transformée de Fourier partielle, $\widehat{\partial_{K_i^*}}$ correspond à la fonction sur $\Pi\mathfrak{h}$ notée $\theta_{K_i^*}$, $\widehat{K_i}$ correspond à dérivée $\partial_{\Pi K_i}$ sur $\Pi\mathfrak{h}$. Les variables P_a et $\partial_{P_a^*}$ ne sont pas changées.

La variété $\mathfrak{h}^\perp \oplus \Pi\mathfrak{h}$ est intrinsèque et ne dépend pas du choix de la décomposition. Les fonctions P_a et Q_a sont égales comme fonctions sur \mathfrak{h}^\perp . Les fonctions $\theta_{K_i^*}$ (pour les deux décompositions) sont égales sur $\Pi\mathfrak{h}$.

Les bi-vecteurs de Poisson pour les deux décompositions s'écrivent respectivement¹⁴ :

$$\pi = [K_i, K_j] \partial_{K_i^*} \wedge \partial_{K_j^*} + 2[K_i, P_a] \partial_{K_i^*} \wedge \partial_{P_a^*} + [P_a, P_b] \partial_{P_a^*} \wedge \partial_{P_b^*}$$

et

$$\pi_1 = [K_i, K_j] \partial_{K_i^*} \wedge \partial_{K_j^*} + 2[K_i, Q_a] \partial_{K_i^*} \wedge \partial_{Q_a^*} + [Q_a, Q_b] \partial_{Q_a^*} \wedge \partial_{Q_b^*}.$$

Par transformée de Fourier partielle notée \mathcal{F} on a :

$$\widehat{\pi} = \partial_{\Pi[K_i, K_j]} \theta_{K_i^*} \theta_{K_j^*} + 2\mathcal{F}([K_i, P_a]) \theta_{K_i^*} \partial_{P_a^*} + \mathcal{F}([P_a, P_b]) \partial_{P_a^*} \wedge \partial_{P_b^*}$$

et

$$\widehat{\pi_1} = \partial_{\Pi[K_i, K_j]} \theta_{K_i^*} \theta_{K_j^*} + 2\mathcal{F}([K_i, Q_a]) \theta_{K_i^*} \partial_{Q_a^*} + \mathcal{F}([Q_a, Q_b]) \partial_{Q_a^*} \wedge \partial_{Q_b^*}.$$

Comme on a $\partial_{Q_a^*} = \partial_{P_a^*}$, le changement de supplémentaire n'opère finalement que sur les coefficients. En définitive si on note e_i une base de \mathfrak{g} adaptée à la première décomposition et e_i^* la base duale. Considérons le bivecteur :

$$\pi_{\mathbb{M}} = \mathbb{M}^{-1} [\mathbb{M} e_i, \mathbb{M} e_j] \partial_{e_i^*} \wedge \partial_{e_j^*}.$$

Alors on aura

$$\widehat{\pi_{\mathbb{M}}} = \widehat{\pi_1}.$$

¹⁴On convient, comme d'habitude, que les indices répétés sont sommés.

Lemme 3. Notons $v = -V_a \partial_{P_a^*}$ le champ de vecteurs sur \mathfrak{g}^* . On a $[v, v]_{SN} = 0$ ¹⁵ et

$$\pi_{\mathbb{M}} = e^{\text{adv}} \cdot \pi = \pi + [v, \pi]_{SN} + \frac{1}{2}[v, [v, \pi]]_{SN}.$$

L'action du champ $-v$ sur le bivecteur π correspond au changement de supplémentaire.

Preuve : Vérifions ce fait dans le cas des paires symétriques (mais le résultat reste vrai en général). On a avec les notations introduites pour la matrice \mathbb{M}

$$\mathbb{M}^{-1}[\mathbb{M}K_i, \mathbb{M}K_j] = [K_i, K_j]$$

$$2\mathbb{M}^{-1}[\mathbb{M}K_i, \mathbb{M}P_a] = 2\mathbb{M}^{-1}[K_i, P_a + \underbrace{\mathbb{D}P_a}_{\in \mathfrak{k}}] = 2[K_i, P_a] - \underbrace{2\mathbb{D}[K_i, P_a]}_{(1)} + \underbrace{2[K_i, \mathbb{D}P_a]}_{(2)}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{-1}[\mathbb{M}P_a, \mathbb{M}P_b] &= \mathbb{M}^{-1}[P_a + \mathbb{D}P_a, P_b + \mathbb{D}P_b] = \\ &\underbrace{[P_a, P_b]}_{\in \mathfrak{k}} + \underbrace{[\mathbb{D}P_a, \mathbb{D}P_b]}_{\substack{\in \mathfrak{k} \\ (3)}} + \underbrace{([\mathbb{D}P_a, P_b] + [P_a, \mathbb{D}P_b])}_{\substack{\in \mathfrak{p} \\ (4)}} - \underbrace{\mathbb{D}([\mathbb{D}P_a, P_b] + [P_a, \mathbb{D}P_b])}_{\substack{\in \mathfrak{p} \\ (5)}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Rappelons que l'on a $v = -V_a \partial_{P_a^*}$ et

$$\pi = [K_i, K_j] \partial_{K_i^*} \wedge \partial_{K_j^*} + 2[K_i, P_a] \partial_{K_i^*} \wedge \partial_{P_a^*} + [P_a, P_b] \partial_{P_a^*} \wedge \partial_{P_b^*}.$$

Calculons $[v, \pi]_{SN} = v \bullet \pi + \pi \bullet v$. On a les formules suivantes :

$$-v \bullet \pi = 2V_a \langle P_a^*, [K_i, P_b] \rangle \partial_{K_i^*} \wedge \partial_{P_b^*} = \underbrace{2\mathbb{D}[K_i, P_b]}_{\in \mathfrak{k}} \partial_{K_i^*} \wedge \partial_{P_b^*}$$

$$-\pi \bullet v = 2 \underbrace{[V_a, K_i]}_{\in \mathfrak{k}} \partial_{K_i^*} \wedge \partial_{P_a^*} + 2 \underbrace{[V_a, P_b]}_{\in \mathfrak{p}} \partial_{P_b^*} \wedge \partial_{P_a^*}$$

$$v \bullet (v \bullet \pi) = 0$$

$$v \bullet (\pi \bullet v) = 2V_c \langle P_c^*, [V_a, P_b] \rangle \partial_{P_b^*} \wedge \partial_{P_a^*} = \underbrace{2\mathbb{D}[V_a, P_b]}_{\in \mathfrak{k}} \partial_{P_b^*} \wedge \partial_{P_a^*}$$

$$(v \bullet \pi) \bullet v = \underbrace{2\mathbb{D}[K_i, P_b]}_{\in \mathfrak{k}} \langle K_i^*, V_c \rangle \partial_{P_b^*} \wedge \partial_{P_c^*} = \underbrace{2\mathbb{D}[V_c, P_b]}_{\in \mathfrak{k}} \partial_{P_b^*} \wedge \partial_{P_c^*}$$

¹⁵On note $[\bullet, \bullet]_{SN}$ le crochet de Schouten-Nijenhuis

$$(\pi \bullet v) \bullet v = 2 \underbrace{[V_a, K_i]}_{\in \mathfrak{k}} \langle K_i^*, V_c \rangle \partial_{P_a^*} \wedge \partial_{P_c^*} = 2 \underbrace{[V_a, V_c]}_{\in \mathfrak{k}} \partial_{P_a^*} \wedge \partial_{P_c^*}.$$

On a donc

$$[v, \pi]_{SN} = \underbrace{-2\mathbb{D}[K_i, P_a] \partial_{K_i^*} \wedge \partial_{P_a^*}}_{(1)} + \underbrace{2[K_i, \mathbb{D}P_a] \partial_{K_i^*} \wedge \partial_{P_a^*}}_{(2)} + \underbrace{2[\mathbb{D}P_a, P_b] \partial_{P_a^*} \wedge \partial_{P_b^*}}_{(4)}$$

et

$$\frac{1}{2}[v, [v, \pi]]_{SN} = \underbrace{-2\mathbb{D}[\mathbb{D}P_a, P_b] \partial_{P_a^*} \wedge \partial_{P_b^*}}_{(5)} - \underbrace{[\mathbb{D}P_a, \mathbb{D}P_b] \partial_{P_a^*} \wedge \partial_{P_b^*}}_{(3)}.$$

On retrouve bien les termes de $\pi_{\mathbb{M}}$ de l'équation (1.1). ■

1.5.2 Dépendance par rapport au supplémentaire

Considérons maintenant la transformée de Fourier partielle. L'action infinitésimale est donnée alors par $[\widehat{v}, \widehat{\pi}]_{SN}$. L'expression

$$\widehat{\pi} + [\widehat{v}, \widehat{\pi}]_{SN} + \frac{1}{2}[\widehat{v}, [\widehat{v}, \widehat{\pi}]]_{SN}$$

représente la transformée de Fourier du bi-vecteur π pour le deuxième choix de supplémentaire, exprimée dans les coordonnées intrinsèques de $\mathfrak{h}^\perp \oplus \Pi\mathfrak{h}$.

La transformée de Fourier partielle \widehat{v} du champ v s'écrit $\partial_{\Pi V_a} \partial_{P_a^*}$. C'est donc un 2-vecteurs à coefficients constants qui vérifie aussi l'équation

$$[\widehat{v}, \widehat{v}]_{SN} = 0.$$

Appliquons le L^∞ quasi-isomorphisme de Kontsevich noté U . On note m la multiplication dans $\mathcal{C}_{poly}(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \wedge \mathfrak{h}^*$. On définit π_t par¹⁶

$$\pi_t = e^{t \text{adv}} \cdot \pi = \pi + t[v, \pi] + \frac{t^2}{2}[v, [v, \pi]].$$

¹⁶On oublie l'indice $_{SN}$ s'il n'y a pas de confusion possible

On a $\pi_{t=0} = \pi$ et $\pi_{t=1} = \pi_1$. On désigne par μ_t la structure A_∞ correspondante :

$$\mu_t = U(e^{\widehat{\pi}_t}) = m + \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon^n}{n!} U_n(\widehat{\pi}_t, \dots, \widehat{\pi}_t).$$

Il vient en conséquence :

$$\begin{aligned} \mu_{q_1} = \mu_{t=1} &= U(e^{\widehat{\pi} + [\widehat{v}, \widehat{\pi}] + \frac{1}{2}[\widehat{v}, [\widehat{v}, \widehat{\pi}]]}) = \\ &= m + \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon^n}{n!} U_n\left(\widehat{\pi} + [\widehat{v}, \widehat{\pi}] + \frac{1}{2}[\widehat{v}, [\widehat{v}, \widehat{\pi}]], \dots, \widehat{\pi} + [\widehat{v}, \widehat{\pi}] + \frac{1}{2}[\widehat{v}, [\widehat{v}, \widehat{\pi}]]\right). \end{aligned}$$

La question est de savoir comment écrire $\mu_{t=1}$ en fonction de $\mu_{t=0}$.

La dérivée $DU_{\widehat{\pi}_t}$ au point $\widehat{\pi}_t$ est un morphisme de complexes. On a donc en dérivant

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \epsilon DU_{\widehat{\pi}_t}([\widehat{v}, \widehat{\pi}_t]_{SN}) = [DU_{\widehat{\pi}_t}(\widehat{v}), \mu_t]_{GH}.$$

Lemme 4. *L'opérateur $DU_{\widehat{\pi}}(\widehat{v})$ est de degré 0 (si l'on tient compte de tous les degrés impairs) et n'a pas de composantes de degré -1 dans le complexe de Hochschild.*

Dans notre situation linéaire, c'est le même raisonnement que dans le lemme 1.4.2. En effet pour des raisons de dimension et de degré, la composante de degré -1 ne pourrait apparaître que pour le diagramme réduit à v . Sa contribution est nulle car v est nul sur \mathfrak{h}^\perp . ■

Remarque : Notons toutefois que l'opérateur $DU_{\widehat{\pi}}(\widehat{v})$ possède *a priori* des composantes en tout degré positif pour le complexe de Hochschild.

Notons Y le champ sur la variété de Maurer-Cartan ou plus généralement un champ de vecteurs sur la variété formelle image $U(T_{poly}(\mathcal{A})_1)$ (l'image par U des poly-vecteurs de degré total 1), c'est à dire une co-dérivation de la cogèbre image $U(S^+(T_{poly}(\mathcal{A})_1))$ ¹⁷ défini au point $\nu = U(e^{\widehat{\pi}})$ par :

$$Y(\nu) = [DU_{\widehat{\pi}}(\widehat{v}), \nu]_{GH}.$$

L'équation précédente montre que la courbe intégrale du champ Y relie $\mu_{t=0}$ et $\mu_{t=1}$. On en déduit que les deux structures $\mu_{t=0}$ et $\mu_{t=1}$ sont conjuguées par un élément du groupe formel des difféomorphismes de la variété formelle pointée $U(T_{poly}(\mathcal{A})_1)$ (le groupe à un paramètre qui intègre l'action

¹⁷Si V est un espace gradué on note $S^+(V)$ les éléments non constants dans $S(V[-1])$.

du champ Y).

Toutefois (dans le cas non gradué) d'après [19] § 4.5.2 les deux structures $\mu_{t=0}$ et $\mu_{t=1}$ sont équivalentes par le groupe de gauge (des star-produits formels). En effet l'équation d'évolution s'écrit aussi

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = [DU_{\widehat{\pi}_t}(\widehat{v}), Q]_{\mu_t}$$

avec Q le champ impair correspondant sur la variété formelle correspondant à la structure d'algèbre de Lie différentielle graduée. C'est bien l'équation de [19] § 4.5.2. Par conséquent les structures sont bien conjuguées (comme série formelle en t) par le groupe de gauge. L'élément du groupe de gauge se construit de proche en proche par rapport au degré formel de la variable¹⁸ t . Cet élément dépend évidemment du point $\mu_{t=0}$, tandis que l'élément du groupe des transformations formelles (qui est un groupe plus gros) ne dépend que du champ \widehat{v} .

Pour avoir les idées claires, tout élément du groupe de gauge (des star-produits formels ou des A_∞ -structures) s'écrit sous la forme

$$g = \exp(\epsilon \Delta_1 + \epsilon^2 \Delta_2 + \dots)$$

avec Δ_i des éléments de degré (total) 0 dans $D_{poly}(\mathcal{A})$ avec

$$\mathcal{A} := \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge (\mathfrak{g}^*/\mathfrak{h}^\perp) \simeq \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge \mathfrak{h}^*.$$

Le produit de tels éléments se faisant grâce à la formule de Campbell-Hausdorff et la structure d'algèbre de Lie graduée de $D_{poly}(\mathcal{A})$. On a par définition pour $g = \exp(D)$:

$$g \cdot \mu = e^{\text{ad} D} \mu.$$

Proposition 2. *Lorsque l'on change de supplémentaire, les espaces de réduction sont isomorphes. L'isomorphisme (comme série formelle en t) est donné par l'action d'un élément du groupe de gauge de la forme*

$$\exp \left(\sum_{n \geq 1} t^n E_n \right)$$

où les opérateurs formels (en ϵ) E_n sont de degré total 0 (on tient compte de tous les degrés impairs). En particulier les structures A_∞ données par $\mu_{t=0}$ et $\mu_{t=1}$ sont A_∞ quasi-isomorphes (formellement en t).

¹⁸Voir plus loin la construction perturbative.

Le problème délicat est que la composition pour les opérateurs poly-différentiels n'est pas associative. Par ailleurs il faut faire intervenir la notion d'éléments de type super-groupe dans les cogèbres cocommutatives colibres (voir [23] et [4]). Il faut donc faire attention. Grace à la bar- construction, on peut composer les morphismes de cogèbres. Si $D = (D_i)_{i \geq 0}$ est un élément plat (c'est à dire sans terme de degré -1) de $D_{poly}(\mathcal{A})$ on considère \overline{D} la co-dérivation de cogèbre (sans co-unité) dont les coefficients de Taylor sont les D_i .

Alors $e^{\overline{D}}$ a un sens et c'est un morphisme de cogèbres. On vérifie que l'on a pour $\overline{\mu}$ la co-dérivation de carré nul associé à μ :

$$e^{\overline{D}} \overline{\mu} e^{-\overline{D}} = \overline{e^{\text{ad} D} \mu}$$

ce qui montre que dans notre situation les structures A_∞ sont bien A_∞ quasi-isomorphes.

Corollaire 1. *Les structures A_∞ correspondant à deux choix de supplémentaires sont A_∞ -isomorphes.*

1.5.3 Entrelacement des espaces de cohomologie

Fixons deux supplémentaires et notons dans cette sous-section μ_1 et μ_2 les structures A_∞ correspondantes.

D'après la partie précédente il existe (comme série formelle en t) un élément de degré (total) 0 de la forme $D = t E_1 + t^2 E_2 \dots$. On écrit $D = D_0 + D_1 + \dots$ pour la décomposition dans le complexe de Hochschild (décalé). L'opérateur D_0 ne prend qu'un seul argument, D_1 prend 2 arguments mais est de degré total 0 et par conséquent $D_1(f, g) = 0$ si f, g n'ont pas de composantes dans $\bigwedge \mathfrak{h}^*$.

On aura alors

$$e^{\text{ad} D} \mu_1 = \mu_2.$$

Si on note $\mu_1 = \mu_1^{(0)} + \mu_1^{(1)} + \dots$ les composantes homogènes (pour la graduation de Hochschild décalée) de μ_1 , on aura alors

$$[D, \mu_1]_{GH} = [D_0, \mu_1^{(0)}]_{GH} + \dots,$$

par conséquent la différentielle $\mu_1^{(0)}$ se transforme selon le champ de la variété formelle $\xi \mapsto [D_0, \xi]_{GH}$. On en déduit que les deux différentielles vérifient

$$e^{\text{ad} D_0} \mu_1^{(0)} = \mu_2^{(0)}.$$

Les différentielles $\mu_1^{(0)}$ et $\mu_2^{(0)}$ sont donc conjuguées par l'élément du groupe de gauge pour le complexe de Hochschild

$$f \xrightarrow{\phi} e^{D_0} f = f + D_0(f) + \frac{1}{2} D_0^2(f) + \dots,$$

c'est à dire que l'on a $\phi \circ \mu_1^{(0)} = \mu_2^{(0)} \circ \phi$. En particulier ϕ est un isomorphisme en cohomologie de

$$H^\bullet(\mathcal{A}, \mu_1^{(0)}) \quad \text{sur} \quad H^\bullet(\mathcal{A}, \mu_2^{(0)}).$$

Calculons à l'ordre 1 dans le complexe de Hochschild (c'est à dire que l'on ne garde que les opérateurs au plus 2-différentiel) : on utilise la formule à l'ordre 1 en Y

$$e^{X+Y} = e^X \left(1 + \frac{1 - e^{-\text{ad}X}}{\text{ad}X} Y \right)$$

On a (à l'ordre 1) :

$$\begin{aligned} \mu_2^{(0)} + \mu_2^{(1)} &= e^{\text{ad}D_0 + \text{ad}D_1} (\mu_1^{(0)} + \mu_1^{(1)}) = \\ &= e^{\text{ad}D_0} \left(1 + \text{ad} \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}D_0}}{\text{ad}D_0} D_1 \right) \right) (\mu_1^{(0)} + \mu_1^{(1)}) = \\ &= e^{\text{ad}D_1} \mu_1^{(0)} + e^{\text{ad}D_0} \left(\mu_1^{(1)} + \text{ad} \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}D_0}}{\text{ad}D_0} D_1 \right) \mu_1^{(0)} \right). \end{aligned}$$

On en déduit que l'on a

$$\begin{aligned} \mu_2^{(1)} &= e^{\text{ad}D_0} \left(\mu_1^{(1)} + \text{ad} \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}D_0}}{\text{ad}D_0} D_1 \right) \mu_1^{(0)} \right) = \\ &= e^{\text{ad}D_0} \mu_1^{(1)} + \left[\frac{e^{\text{ad}D_0} - 1}{\text{ad}D_0} D_1, e^{\text{ad}D_0} \mu_1^{(0)} \right] = \\ &= e^{\text{ad}D_0} \mu_1^{(1)} + \underbrace{\left[\frac{e^{\text{ad}D_0} - 1}{\text{ad}D_0} D_1, \mu_2^{(0)} \right]}_{\text{cobord pour } \mu_2^{(0)}}. \end{aligned}$$

En conclusion les deux produits $e^{\text{ad}D_0} \mu_1^{(2)}$ et $\mu_2^{(2)}$ définissent les mêmes produits dans l'espace de cohomologie défini par $\mu_2^{(0)}$ et ϕ réalise un isomorphisme d'algèbres de $H^\bullet(\mathcal{A}, \mu_1^{(0)})$ muni du produit $\mu_1^{(1)}$ sur $H^\bullet(\mathcal{A}, \mu_2^{(0)})$ muni du produit $\mu_2^{(1)}$.

En particulier lorsque f, g sont deux fonctions dans l'espace de réduction (id sans composantes dans $\bigwedge \mathfrak{h}^*$) on aura¹⁹ :

$$\mu_2^{(1)}(e^{D_0} f, e^{D_0} g) = \left(e^{\text{ad} D_0} \mu_1^{(1)} \right) (e^{D_0} f, e^{D_0} g) = e^{D_0} \left(\mu_1^{(1)}(f, g) \right),$$

ce qui montre que l'application $\phi = e^{D_0}$ réalise un isomorphisme d'algèbres sur les espaces de réduction.

On résume cette section en énonçant le théorème suivant :

Théorème 1. *Lorsque l'on change de supplémentaire les espaces de réduction sont isomorphes. L'isomorphisme est donné par l'exponentielle d'un opérateur différentiel (série formelle en t) de degré 0. C'est aussi un isomorphisme d'algèbres de l'espace de cohomologie $\left(H^\bullet(\mathcal{A}, \mu_1^{(0)}), \mu_1^{(1)} \right)$ sur l'espace de cohomologie $\left(H^\bullet(\mathcal{A}, \mu_2^{(0)}), \mu_2^{(1)} \right)$.*

1.6 Bi-quantification

C'est une idée essentielle de l'article de Cattaneo-Felder [8].

Dans leur article, les auteurs définissent une fonction d'angle dépendant de 4-couleurs. En considérant deux sous-variétés co-isotropes de \mathfrak{g}^* , par exemple \mathfrak{h}_1^\perp et \mathfrak{h}_2^\perp , cette fonction d'angle à 4-couleurs permet de définir sur un espace de déformation modelé sur $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)^\perp = \mathfrak{h}_1^\perp \cap \mathfrak{h}_2^\perp$ une action de l'espace de réduction $H_\epsilon^\bullet(\mathfrak{h}_1^\perp)$ à droite et une action de l'espace de réduction $H_\epsilon^\bullet(\mathfrak{h}_2^\perp)$ à gauche.

1.6.1 Définition de la fonction d'angle à 4-couleurs

Soit ϵ_1, ϵ_2 dans $\{-1, 1\}$. Ce sont les couleurs. Pour p, q dans le premier cadran (les nombres complexes vérifiant $\text{Im}(p) > 0, \text{Im}(q) > 0, \text{Re}(p) > 0$ et $\text{Re}(q) > 0$), on définit la fonction d'angle à 4-couleurs :

$$\phi_{\epsilon_1, \epsilon_2}(p, q) = \arg(p - q) + \epsilon_1 \arg(p - \bar{q}) + \epsilon_2 \arg(p + \bar{q}) + \epsilon_1 \epsilon_2 \arg(p + q).$$

On met le signe ϵ_i lorsqu'on fait la symétrie par rapport à l'axe i comme dans Fig. 4.

Cette fonction d'angle vérifie les propriétés de nullité résumées dans Fig. 5 où on a représenté les fonctions d'angles non nulles *a priori*.

¹⁹Rappelons que l'on a $\tilde{D}_1(f, g) = 0$ lorsque le degré total de \tilde{D}_1 est nul.

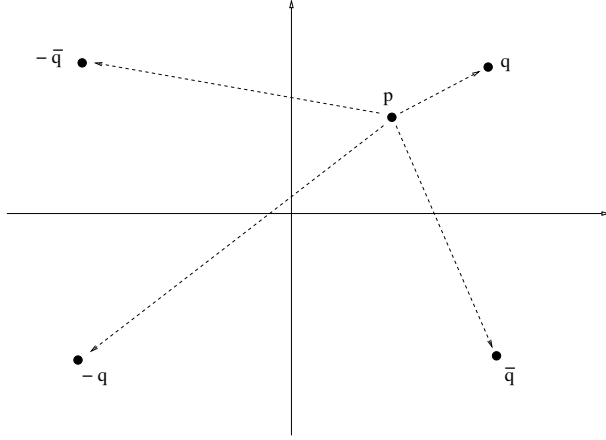


FIG. 4 – Construction de la fonction d'angle à 4-couleurs

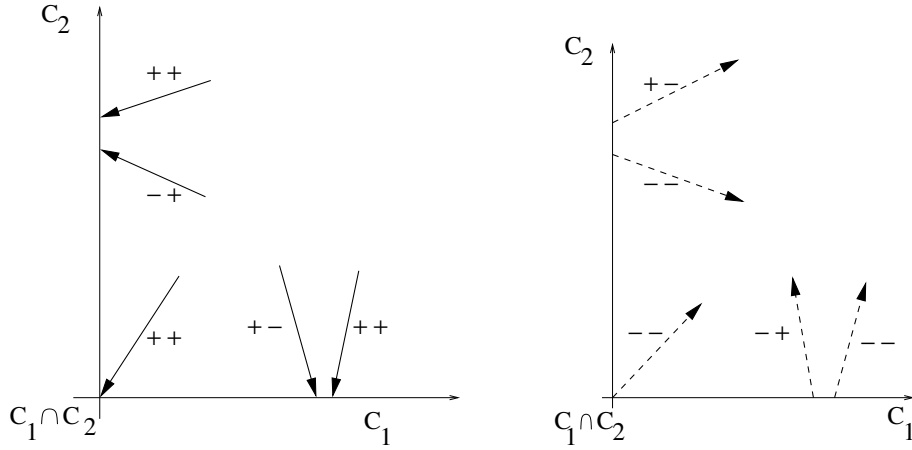


FIG. 5 – Fonction d'angle à 4-couleurs

On va considérer les intégrales des formes d'angles associés aux diagrammes de Kontsevich colorés. Les variétés sur lesquelles on intègre ces formes sont les variétés de configurations de points dans le premier cadran (supérieur droit=Nord-Est) modulo l'action des dilatations. On utilise les mêmes compactifications que celles décrites dans Kontsevich mais adaptées à notre situation.

Propriétés de bord :

1. Lorsque p, q se concentrent sur l'axe horizontal les fonctions d'angles $d\phi_{\epsilon_1, \epsilon_2}(p, q)$ tendent vers la 1-forme d'angle

$$d\phi_{\epsilon_1}(p, q) = d \arg(p - q) + \epsilon_1 d \arg(p - \bar{q})$$

2. Lorsque p, q se concentrent sur l'axe vertical les fonctions d'angles $d\phi_{\epsilon_1, \epsilon_2}(p, q)$ tendent vers 1-forme d'angle

$$d\phi_{\epsilon_2}(p, q) = d \arg(p - q) + \epsilon_2 d \arg(p + \bar{q})$$

1.6.2 Diagrammes à 4-couleurs

Soit C_1 et C_2 deux sous-variétés co-isotropes. On fixe un système de coordonnées et on suppose que l'on a localement une situation d'intersection normale. On peut donc identifier le fibré normal de C_i à un voisinage de C_i ($i = 1$ ou $i = 2$).

On considère tous les diagrammes numérotés et colorés par les variables de dérivations. Aux sommets à l'intérieur du cadran Nord-est, on place un bivecteur de Poisson²⁰. Les arêtes sont colorées par les variables par rapport on dérive.

Si la variable est

1. dans C_1 et dans C_2 la couleur sera $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (+, +)$
2. dans C_1 mais pas dans C_2 la couleur sera $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (+, -)$
3. dans C_2 mais pas dans C_1 la couleur sera $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (-, +)$
4. ni dans C_1 ni dans C_2 la couleur sera $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (-, -)$.

En conséquence dans la formule de Stokes, les variétés qui apparaissent dans les concentrations près de l'axe horizontal et de l'axe vertical correspondent aux variétés de configurations dans le demi-plan supérieur avec formes d'angle à deux couleurs décrites dans § 1.3.1. On retrouve la situation avec une seule variété co-isotrope C_1 ou C_2 .

1.6.3 Définition de l'espace de réduction de deuxième espèce de l'intersection $C_1 \cap C_2$

Hypothèse 1 : On fait l'hypothèse de **courbure nulle**, c'est à dire que l'on suppose $F_{\pi, C_i} = 0$ pour $i = 1$ et $i = 2$ dans la procédure de quantification du § 1.4.1.

On considère l'opérateur associé aux contributions de tous les diagrammes avec un sommet terrestre placé à l'origine. C'est un opérateur qui agit sur les poly-vecteurs sur $C_1 \cap C_2$ (avec dérivées transverse à $C_1 \cup C_2$). Cet opérateur est encore, grace à la formule de Stokes et l'hypothèse 1 ci-dessus, une différentielle notée $\mathcal{A}_{\pi, C_1, C_2}$ et l'espace de réduction pour $C_1 \cap C_2$ correspond à la cohomologie associée à cet opérateur.

²⁰Ici π est un bi-vecteur de Poisson général.

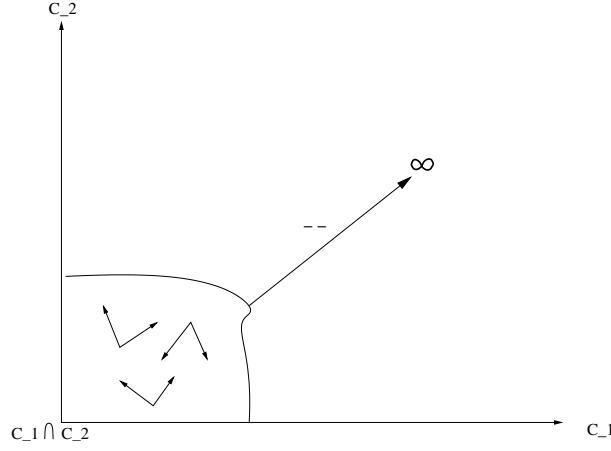


FIG. 6 – Diagramme intervenant dans le 1-vecteur avec origine 1

Hypothèse 2 : On suppose que la fonction constante égale à 1 est dans l'espace de cohomologie, c'est à dire $\mathcal{A}_{\pi, C_1, C_2}(1) = 0$.²¹

Remarque : Cette hypothèse est automatiquement vérifiée dans le cas de bi-vecteurs de Poisson linéaire.

1.6.4 Définition de la structure de bi-module

Sur l'axe i (horizontal pour C_1 et vertical pour C_2) on place des poly-vecteurs restreints à C_i avec dérivées normales à C_i (couleur $-\bullet$ ou couleur $\bullet-$). En effet si la dérivée n'est pas transverse les diagrammes associés auront un coefficient nul (présence d'une forme d'angle nulle). A l'origine on place des poly-vecteurs restreints à $C_1 \cap C_2$ avec dérivées normales à C_1 et C_2 (couleur $--$).

Dans le cas qui nous intéresse, on aura $C_i := \mathfrak{h}_i^\perp$ et les espaces en question pourront être

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{C}_{poly}(\mathfrak{h}_i^\perp) \otimes \bigwedge (\mathfrak{g}^* / \mathfrak{h}_i^\perp) \simeq \mathcal{C}_{poly}(\mathfrak{h}_i^\perp) \otimes \bigwedge \mathfrak{h}_i^*$$

et

$$\mathcal{A}_{1,2} = \mathcal{C}_{poly}(\mathfrak{h}_1^\perp \cap \mathfrak{h}_2^\perp) \otimes \bigwedge (\mathfrak{h}_1^* \cap \mathfrak{h}_2^*)$$

Les contributions des opérateurs associés aux diagrammes et des poids, est alors restreint à $C_1 \cap C_2$ et il est autorisé aux arêtes colorées par $--$ de

²¹Cette hypothèse est analogue à l'hypothèse sur la courbure pour les sous-variétés C_i . En d'autres termes on suppose que la contribution des diagrammes avec aucun point sur les axes ni à l'origine, est nulle (cf. Fig. 6).

sortir à l'infini. Cela fournit une dérivée transverse à $C_1 \cup C_2$. On définit ainsi une opération tri-linéaire de $\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_{1,2} \otimes \mathcal{A}_1$ dans $\mathcal{A}_{1,2}$

On note \star_1 le produit de droite et \star_2 le produit de gauche.

1.6.5 Compatibilité en cohomologie

Expliquons la compatibilité à droite de l'action (notée \star_1) en cohomologie (on ferait de même pour les autres cas) : il suffit d'examiner les strates terrestres qui vont intervenir dans les différents bords.

Soit f dans l'espace de cohomologie pour la différentielle $\mathcal{A}_{\pi, C_1, C_2}$ et soient g et h dans l'espace de cohomologie pour la différentielle \mathcal{A}_{π, C_1} .

On place f à l'origine, g et h sur l'axe horizontal.

La formule de Stokes appliquée dans ce contexte va donner une compatibilité en cohomologie.

- Les concentrations sur les axes sont nulles (Fig. 7 CAS G, Fig. 7 CAS H) car on a suppose que l'on est dans le cas de courbure nulle (on dit aussi plat si on a $\mu_{-1, C_i} = 0$).
- Il est presque clair qu'avec ces conventions, les concentrations horizontales (Fig. 7 CAS A , Fig. 7 CAS B) redonnent la différentielle \mathcal{A}_{π, C_1} d'une seule variété co-isotrope agissant sur g ou h .
- Les concentrations (Fig. 7 CAS C) donnent la différentielle $\mathcal{A}_{\pi, C_1, C_2}$ de la variété $C_1 \cap C_2$ agissant sur f .
- La concentration (Fig. 7 CAS E) donne un terme de la forme

$$(f \star_1 g) \star_1 h$$

- Les concentrations (Fig. 7 CAS F) donnent un terme de la forme

$$f \star_1 (g \star_{CF} h).$$

- Il reste les concentrations (Fig. 7 CAS D), qui produisent un cobord pour $C_1 \cap C_2$.

La compatibilité des actions à gauche et à droite résulte de la formule de Stokes comme toujours. Les strates de bord de type Fig. 7 CAS D fournissent un cobord de l'espace de réduction de $C_1 \cap C_2$, donc la compatibilité des actions à droite n'est vraie qu'en cohomologie. ■

En considérant deux points terrestres (un à l'origine, et l'autre sur l'axe des abscisses) on en déduirait le lemme suivant

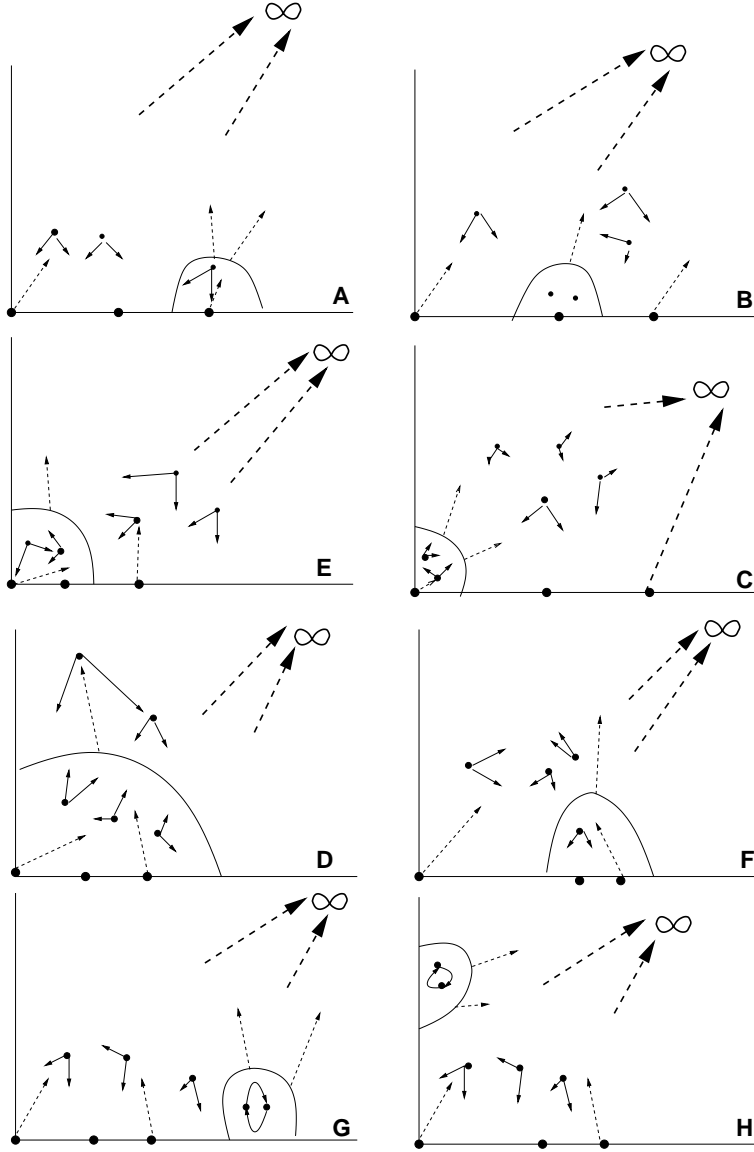


FIG. 7 – Diverses strates pour la compatibilité de l'action à droite en cohomologie

Lemme 5. *L'action des cobords à droite (ou à gauche) sur les cocycles fournit un cobord dans l'espace de $C_1 \cap C_2$.*

On peut donc conclure cette section par la proposition de compatibilité en cohomologie :

Proposition 3. *La description en termes de diagrammes de Feynman, fournit une action en cohomologie des espaces de réduction de C_1 à droite et de*

C_2 à gauche sur l'espace de cohomologie de réduction de **deuxième espèce** associé à $C_1 \cap C_2$.

En degré 0 on retrouve le résultat de Cattaneo-Felder [7].

Corollaire 2. *Au niveau des fonctions, on a une action à droite et à gauche des espaces de réductions de C_1 et de C_2 sur l'espace de réduction de deuxième espèce de $C_1 \cap C_2$.*

Remarque : On fera attention que la définition de l'espace de réduction de l'intersection, appelé de deuxième espèce, est différent de l'espace de réduction de première espèce (pour les variétés co-isotropes). D'ailleurs $C_1 \cap C_2$ n'est pas une sous-variété co-isotrope, on ne peut donc pas appliquer la procédure de quantification du § 1.4.1.

2 Exemples d'espaces de réduction

Prenons Γ un graphe coloré. Enonçons un lemme utile dans la simplification des calculs.

Lemme 6. *Si Γ a un sommet de la forme $\overset{x}{\bullet} \leftarrow \overset{z}{\bullet} \dashrightarrow \overset{y}{\bullet}$ alors $w_\Gamma = 0$.*

Preuve : Dans un tel graphe la forme Ω_Γ que l'on intègre présente à ce sommet la configuration suivante

$$\boxed{\begin{array}{c} \overset{x}{\bullet} \leftarrow \overset{z}{\bullet} \dashrightarrow \overset{y}{\bullet} \quad = \quad \overset{x}{\bullet} \leftarrow \overset{z}{\bullet} \leftarrow \overset{y}{\bullet}. \end{array}}$$

Les dérivées en z dans Ω_Γ ne proviennent que de cette partie du diagramme, donc le calcul se fait à x, y fixés. On a donc $w_\Gamma = 0$ d'après un lemme de [19]. ■

2.1 Cas des paires symétriques (ou cas d'un supplémentaire stable)

On se place dans le cas des paires symétriques. On considère λ un caractère de \mathfrak{k} , c'est à dire une forme linéaire telle que $\lambda([\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]) = 0$. Alors $\lambda + \mathfrak{k}^\perp$ est l'espace affine des formes linéaires dont la restriction à \mathfrak{k} vaut λ . C'est une sous-variété coisotrope.

Proposition 4. *Dans le cas des paires symétriques (et plus généralement dans le cas où \mathfrak{h} admet un supplémentaire stable sous l'action adjointe de \mathfrak{h}) on a $A_\pi = \epsilon d_{CE}$. Par conséquent l'espace de réduction pour la sous-variété $\lambda + \mathfrak{k}^\perp$ est*

$$\boxed{H_\epsilon^0(\mathfrak{k}^\perp) = \mathcal{C}_{poly}(\mathfrak{k}^\perp)^{\mathfrak{k}}[[\epsilon]] = S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}[[\epsilon]].}$$

Preuve : La démonstration se base sur l'inventaire des diagrammes qui peuvent apparaître dans A_π . Pour une paire symétrique (et plus généralement si \mathfrak{h} admet un supplémentaire stable), les crochets vérifient $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, ce qui imposent certaines restrictions sur les couleurs des diagrammes. On place au point terrestre un élément de $\mathcal{C}_{poly}(\lambda + \mathfrak{k}^\perp) \otimes \bigwedge \mathfrak{k}^*$ de degré q . Il sort nécessairement $q + 1$ arêtes à l'infini, donc au moins une arête sort d'un point aérien du graphe Γ . Pour $n \geq 2$ les graphes qui interviennent sont de deux types.

-i- Si dans le graphe aérien on a une arête colorée par \mathfrak{k}^* qui sort à l'infini, alors au sommet de sortie on a dans le graphe Γ :

-soit deux arêtes de même couleur qui se suivent (car on a $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ et $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$) et le coefficient w_Γ vaut 0 d'après un lemme de [19],

-soit une seule arête (colorée nécessairement par \mathfrak{p}^* car $\lambda[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] = 0$) auquel cas le coefficient w_Γ est encore nul car $n \geq 2$ et ce sommet ne contribue qu'une fois²² dans la forme Ω_Γ .

-ii- Si deux arêtes colorées par \mathfrak{k}^* sortent d'un même sommet, alors ce sommet ne contribue qu'au plus une fois dans la forme différentielle. Comme $n \geq 2$, le coefficient sera nul.

On conclut que les arêtes qui sortent à l'infini proviennent de l'axe réel. Comme au moins une arête sort d'un sommet aérien, toutes les contributions pour $n \geq 2$ sont nulles.

En conséquence seuls les graphes pour $n = 1$ interviennent c'est à dire que l'on retrouve comme espace de réduction, l'espace $d_{CE}(\phi) = 0$ pour la différentielle de Cartan-Eilenberg.

■

Corollaire 3. *Les constructions de Cattaneo-Felder munissent $H^\bullet(\mathfrak{k}, S(\mathfrak{p}))$ d'une structure associative.*

2.2 Cas linéaire pour les fonctions

Plaçons nous dans le cas linéaire (par forcément pour une paire symétrique) avec \mathfrak{h}^\perp comme variété co-isotrope. On ne suppose pas que \mathfrak{h} admet un supplémentaire stable.

Graphes intervenant dans le calcul de A_π pour les fonctions :

Lorsqu'on place au sommet terrestre une fonction, les graphes qui interviennent dans le calcul de la différentielle A_π sont de trois types²³ :

-i- les graphes de type Bernoulli avec la dernière arête partant à l'infini (cf. Fig. 8)

-ii- les graphes de type roues avec des rayons attachés directement à l'axe réel sauf pour l'un d'entre eux qui est attaché à un graphe de type Bernoulli

²²Ce sommet se déplace sur 2 dimensions, tandis que cette variable ne contribue qu'une fois dans Ω_Γ .

²³On pourrait regrouper les deux derniers types.

dont la dernière arête part à l'infini (cf. Fig. 9)

-iii- les graphes de type roues avec des rayons attachés directement à l'axe réel sauf pour l'un d'entre eux qui part à l'infini (cf. Fig. 10)

En effet ce sont les mêmes graphes que ceux que l'on rencontre dans la formule de Kontsevich $f \star_{Kont} g$ pour les algèbres de Lie, lorsqu'on prend pour g une forme linéaire. La forme linéaire correspond ici à la direction qui part à l'infini.

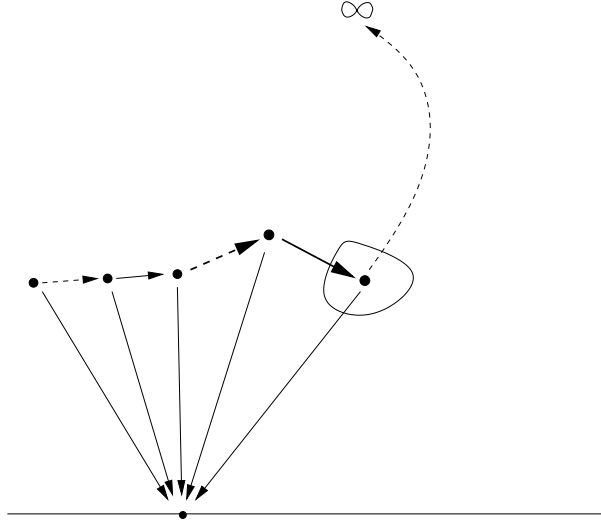


FIG. 8 – Graphe de type Bernoulli quand aucune arête ne part de l'axe réel vers le diagramme

Parité et homogénéité :

Lemme 7. *Les coefficients associés aux graphes intervenant dans le calcul de $A_\pi(f)$ sont nuls si le nombre de sommets est pair.*

Preuve : La variété de configurations admet une symétrie par rapport à l'axe vertical. S'il y a n sommets, il y a $2n - 1$ arêtes (car l'une d'entre elles part à l'infini). En faisant agir la symétrie on trouve un facteur $(-1)^{n+1}$, ce qui montre que n doit être impair pour que le coefficient soit non nul. ■

Lemme 8. *Si $f = f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots$ est dans l'espace de réduction, alors $F = f_0 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^4 f_4 + \dots$ l'est aussi et l'on peut prendre F homogène si l'on tient compte du degré de ϵ (qui vaut par convention 1).*

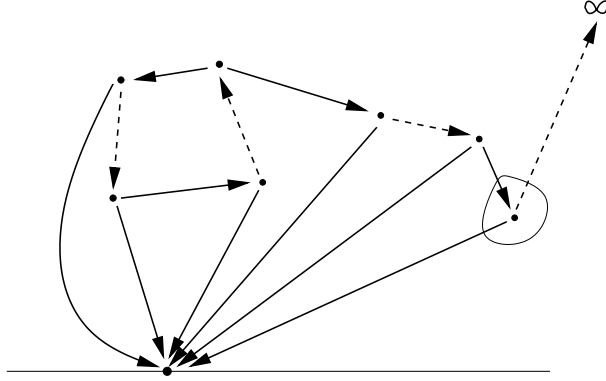


FIG. 9 – Graphe de type roue lorsqu'aucune arête de part de l'axe réel vers le diagramme

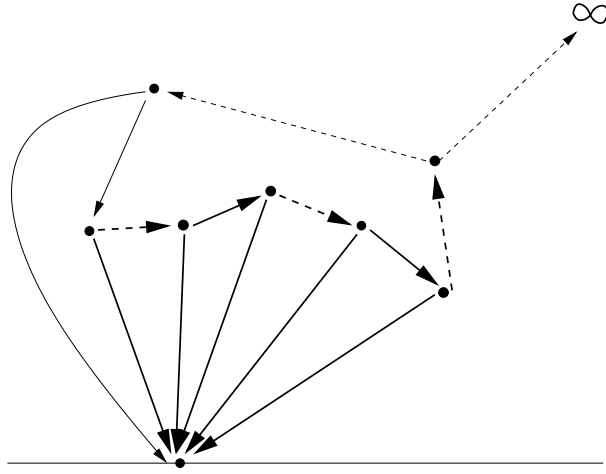


FIG. 10 – Graphe de type roue avec une arête partant à l'infini

Preuve : Les diagrammes qui interviennent dans les équations de réduction sont soit trois type :

-i- Bernoulli B_n : l'opérateur dérive n fois mais ajoute un degré (à cause de la racine), le degré total (y compris ϵ) est donc 1.

-ii- Roue (attachée ou non à un Bernoulli) : l'opérateur dérive $n - 1$ fois, le degré total (y compris ϵ) est donc 1.

Les diagrammes avec un nombre pair de sommets n'interviennent pas, donc les termes modulo 2 vérifient encore le système de réduction.

Les équations s'écrivent (avec D_n les contributions des graphes avec n sommets) :

$$D_1(f_0) = 0, \quad D_1(f_2) + D_3(f_0) = 0 \quad \dots$$

donc les composantes homogènes (en tenant compte de ϵ) vérifient encore le système. ■

2.3 Cas linéaire pour les poly-vecteurs

On se place encore dans le cas linéaire (par forcément pour une paire symétrique) avec \mathfrak{h}^\perp comme variété co-isotrope. Décrivons les graphes qui vont intervenir dans le calcul de la différentielle A_π lorsqu'on l'applique sur un élément de $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{h}^\perp) \otimes \bigwedge \mathfrak{h}^*$.

Lemme 9. *Les graphes intervenant dans le calcul de la différentielle des éléments de \mathcal{A} , sont de deux types : les graphes déjà rencontrés pour les fonctions (la partie dans $\bigwedge \mathfrak{h}^*$ n'intervient pas) et les graphes qui sont le crochet de deux Bernoulli, avec une dérivation unique de la racine par une arête issue de l'axe réel (voir Fig. 12).*

Preuve : Deux cas se présentent.

i- Toutes les arêtes issues de l'axe réel vont à l'infini ; dans ce cas les diagrammes qui interviennent sont les mêmes que pour les fonctions.

ii- Une ou plusieurs arêtes issues de l'axe réel vont sur un sommet aérien. Ces sommets sont des racines de graphes de type Lie (dont certaines arêtes pourraient partir à l'infini).

Il n'y a qu'une arête issue de l'axe réel qui va vers un sommet aérien sinon la forme à intégrer serait à variables séparées et on aurait un problème de dimension (à cause du groupe de dilatation).

De ce graphe il part 2 arêtes à l'infini. Raisonnons en terme de symbole $\Gamma(X, Y)$ de ce graphe. Le mot $\Gamma(X, Y)$ doit être de type Lie et de degré deux en Y (représentant les deux arêtes qui partent à l'infini). Le mot s'écrit sous la forme $[A, B]$. Comme l'arête issue de l'axe réel dérive le sommet du graphe, les mots A et B doivent contenir Y , sinon $A = X$ ou $B = X$ et on aurait une arête double comme dans Fig. 11 (n'oublions pas que la couleur inverse l'arête). En conséquence les mots A et B sont des mots de type Bernoulli c'est à dire de la forme

$$\underbrace{[X, [X, \dots, [X, Y]]]}_{n \text{ fois}}.$$

L'arête partant à l'infini étant placée en dernière position. Ces graphes sont comme dans Fig. 12. Lorsque les mots sont réduits à Y on retrouve le graphe intervenant dans la différentielle de Hochschild. ■

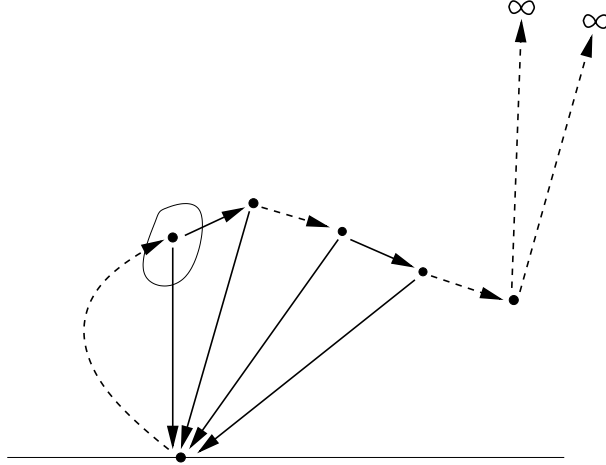


FIG. 11 – Graphe n'intervenant pas dans la différentielle pour les formes

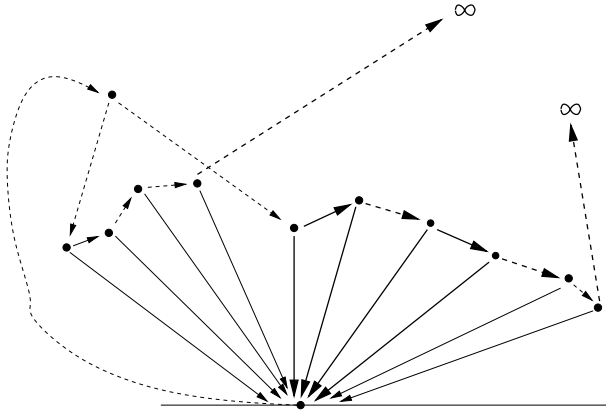


FIG. 12 – Graphe pouvant intervenir dans le calcul A_π pour les formes dans le cas linéaire

2.4 Cas Iwasawa

Considérons une paire symétrique. Nous avons défini dans [34] une notion de décomposition d'Iwasawa, généralisant la décomposition d'Iwasawa pour les paires symétriques réductives. Pour simplifier la lecture de cet article, rappelons brièvement cette construction qui intervient dans la définition de l'homomorphisme d'Harish-Chandra généralisé.

2.4.1 Rappels sur la notion de décomposition d'Iwasawa généralisée

Pour $\xi \in \mathfrak{k}^\perp$ on note $\mathfrak{g}(\xi)$ le centralisateur de ξ pour l'action co-adjointe. C'est une sous-paire symétrique algébrique ; elle admet une décomposition de Cartan notée $\mathfrak{k}(\xi) \oplus \mathfrak{p}(\xi)$.

Lorsque la dimension de $\mathfrak{g}(\xi)$ est minimale pour ξ parcourt \mathfrak{k}^\perp , on dira que ξ est régulier. Les éléments réguliers forment un ouvert de Zariski. On a alors $[\mathfrak{k}(\xi), \mathfrak{p}(\xi)] = 0$, ce qui permet de montrer que la sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{p}(\xi)$ est nilpotente. On note \mathfrak{s}_ξ sa partie semi-simple, c'est donc une sous-algèbre abélienne formée d'éléments semi-simples (un tore) et qui est dans \mathfrak{p} . On dira que ξ est générique lorsque la dimension de ce tore est maximale. Ce tore généralise la notion de *sous-espace de Cartan*.

On peut alors décomposer \mathfrak{g} sous l'action adjointe de \mathfrak{s}_ξ lorsque ce tore est diagonalisable (déployé ²⁴). C'est ce que nous supposons²⁵. On note \mathfrak{g}_o le centralisateur de \mathfrak{s}_ξ . C'est une sous-paire symétrique, appelée *petite paire symétrique*. On note $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{p}_o$ sa décomposition de Cartan. Comme $\mathfrak{s}_\xi \subset \mathfrak{p}$, si α est une racine alors $-\alpha$ aussi ; ceci permet d'exhiber, en séparant les racines et leurs opposées, des décompositions triangulaires :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{n}_+$$

et des décompositions d'Iwasawa :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_o \oplus \mathfrak{n}_+.$$

2.4.2 Espace de réduction

On fixe une décomposition d'Iwasawa généralisée dans le cas des paires symétriques

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_o \oplus \mathfrak{n}_+$$

et on note $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{p}_o$.

Proposition 5. *L'espace de réduction pour la sous-variété co-isotrope $(\mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{n}_+)^\perp$ est*

$$H_\epsilon^0((\mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{n}_+)^\perp) = C_{poly}(\mathfrak{k}_o^\perp)^{\mathfrak{k}_o}[[\epsilon]] = S(\mathfrak{p}_o)^{\mathfrak{k}_o}[[\epsilon]].$$

Preuve : On fixe un supplémentaire de \mathfrak{k}_o dans \mathfrak{k} noté \mathfrak{r} . Les couleurs des arêtes sont donc :

²⁴C'est le cas si l'algèbre de Lie est complexe.

²⁵Cette restriction n'est pas très sévère, car il suffit de tout complexifier et de considérer la paire symétrique complexe obtenue comme une paire symétrique réelle.

- les arêtes colorées par $--\rightarrow$ correspondent aux variables dans $\mathfrak{n}_+^*, \mathfrak{k}_o^*$
- les arêtes colorées par \longrightarrow correspondent aux variables $\mathfrak{p}_o^*, \mathfrak{t}^*$ que l'on peut identifier à $\mathfrak{k}^*/\mathfrak{k}_o^*$.

Soit f vérifiant l'équation $A_\pi(f) = 0$. Faisons un développement en fonction ϵ , le paramètre de déformation qui correspond pour A_π à la graduation par le nombre de sommets dans les graphes. Écrivons

$$A_\pi = D_1 + D_2 + D_3 + \dots$$

On a

$$f = f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 \dots,$$

et par conséquent les équations

$$D_1(f_0) = 0, \quad D_1(f_1) + D_2(f_0) = 0, \quad D_1(f_2) + D_2(f_1) + D_3(f_0) = 0 \quad \dots$$

En considérant les composantes homogènes dans l'équation $A_\pi(f) = 0$ on trouve que f_0 est $\mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{n}_+$ -invariant, et donc un élément de $S(\mathfrak{p}_0)^{\mathfrak{k}_0}$ d'après [34].

D'après le lemme 7, seuls interviennent les opérateurs D_n pour n impair. Ces opérateurs, sur les fonctions, correspondent à des graphes de type Bernoulli ou à des graphes de type roues attachés à un Bernoulli.

Examinons l'action des opérateurs associés à ces graphes sur un élément $f_o \in S(\mathfrak{p}_0)^{\mathfrak{k}_0}$. Comme on ne peut dériver f_o qu'en les directions \mathfrak{p}_o^* , toutes les arêtes qui arrivent sur une telle fonction sont colorées par \longrightarrow . L'arête sortant à l'infini est soit dans \mathfrak{k}_o^* , soit dans \mathfrak{n}_+^* .

Premier cas : C'est le type Bernoulli comme dans Fig. 13.

Le coefficient sera nul si on a deux arêtes de type \longrightarrow qui se suivent au sommet où l'arête part à l'infini. Par conséquent l'arête qui part à l'infini est colorée par \mathfrak{n}_+^* . Maintenant dans le diagramme comme on a $[\mathfrak{p}_0, \mathfrak{n}_+] \subset \mathfrak{n}_+$, le sommet dans le diagramme représente pour l'opérateur différentiel un coefficient dans \mathfrak{n}_+ qui est donc nul quand on le restreint à la sous-variété $(\mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{n}_+)^\perp$.

Deuxième cas : Comme dans Fig. 14, le diagramme à considérer de manière générale est une roue attachée à l'axe réel et à un sous-graphe de Bernoulli (ce graphe pouvant être vide auquel cas l'arête part directement à l'infini et est colorée par \mathfrak{n}_+^*). Comme précédemment, pour que le

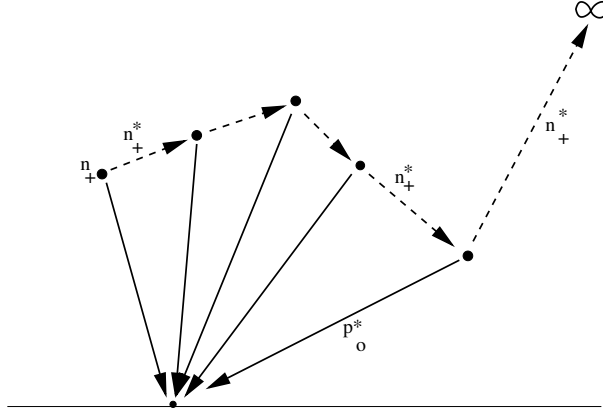


FIG. 13 – Diagramme type Bernoulli avec sommet dans \mathfrak{n}_+

coefficient soit non nul, l'arête qui part à l'infini est colorée par \mathfrak{n}_+^* . Ceci implique que l'attache sur la roue se fait dans des dérivations selon \mathfrak{n}_+^* (voir Fig. 14). La dérivation dans la roue se fait alors soit de manière homogène selon les dérivées \mathfrak{n}_+^* pour la couleur $--\rightarrow$, soit selon des dérivées dans la direction $\mathfrak{k}^*/\mathfrak{k}_o^*$ avec couleur $--\rightarrow$. Dans les deux cas l'opérateur fera apparaître un terme de la forme

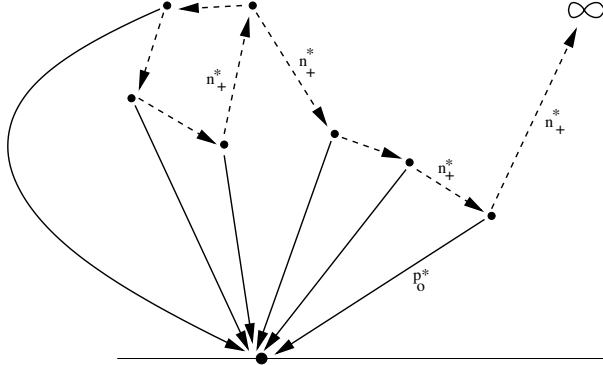


FIG. 14 – Diagramme type roue attachée Bernoulli avec roue colorée de manière uniforme

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}_+}(\mathrm{ad}P_1 \dots \mathrm{ad}P_l \mathrm{ad}N_1) = 0$$

ou un terme de la forme

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{n}_+)}(\mathrm{ad}P_1 \dots \mathrm{ad}P_l \mathrm{ad}N_1) = 0.$$

L'opérateur différentiel sera alors nul quand on l'applique à des fonctions qui sont dans $S(\mathfrak{p}_o)^{\mathfrak{k}_o}$. Par conséquent le système d'équations est tout sim-

plement $D_1(f_p) = 0$. ■

2.5 Cas des polarisations

On prend $\xi \in \mathfrak{g}^*$ une forme linéaire. La forme bilinéaire alternée B_ξ définie par $B_\xi(X, Y) = \xi[X, Y]$ pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, admet pour noyau $\mathfrak{g}(\xi)$. Une polarisation en ξ dans \mathfrak{g} est une sous-algèbre isotrope pour B_ξ et de dimension maximale. C'est automatiquement une sous-algèbre algébrique. On dit que ξ vérifie la condition de Pukanszky si on a $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}(\xi) + \mathfrak{b}_u$ avec \mathfrak{b}_u le radical unipotent de \mathfrak{b} .

Alors $\xi + \mathfrak{b}^\perp$ est une sous-variété co-isotrope. On note B un sous-groupe algébrique connexe de G d'algèbre de Lie \mathfrak{b} .

Proposition 6. *L'espace de réduction pour la sous-variété $\xi + \mathfrak{b}^\perp$ est le corps \mathbb{R} , c'est à dire que l'on a*

$$H_\epsilon^0(\xi + \mathfrak{b}^\perp) = \mathbb{R}.$$

Preuve : Considérons une fonction $f = f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 \dots$ dans l'espace de réduction. La première équation fournit des fonctions B -invariante sur $\xi + \mathfrak{b}^\perp$, c'est à dire des fonctions constantes, car $B \cdot f$ est ouvert dans $\xi + \mathfrak{b}^\perp$. Comme précédemment les autres équations $D_1(f_2) + D_2(f_1) = 0$ etc.. se résument par récurrence aux équations $D_1(f_n) = 0$ pour tout n , ce qui prouve la proposition. ■

3 Fonction $E(X, Y)$ pour les paires symétriques

On se place dans le cas des paires symétriques $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ et on considère le cas de la sous-variété $\lambda + \mathfrak{k}^\perp$. On considère le produit B_π (qui prend deux arguments) introduit au § 1.4.1 pour π le bi-vecteur de Poisson associé au crochet de Lie.

3.1 Définition de la fonction $E(X, Y)$ pour les paires symétriques

Pour $X, Y \in \mathfrak{p}$ on considère les fonctions sur exponentielles e^X et e^Y . On considère alors $B_\pi(e^X, e^Y)$ que l'on restreint à $\lambda + \mathfrak{k}^\perp$. On pourra consulter [3] pour une description précise des graphes dans le cas linéaire.

Lemme 10. *Dans le calcul de $B_\pi(e^X, e^Y)$ les graphes de type Lie avec racine dans \mathfrak{p} n'interviennent pas.*

Preuve : D'après le lemme 6, si la racine d'un tel graphe est dans \mathfrak{p} , alors le poids associé est nul car le graphe présente à la racine un sommet de la forme $\overset{x}{\bullet} \leftarrow \overset{z}{\bullet} \dashrightarrow \overset{y}{\bullet}$. ■

Dans le cas des paires symétriques, seuls les graphes avec racines dans \mathfrak{k} interviennent, donc par restriction on trouve l'action du caractère. Comme d'habitude, les graphes sont des superpositions de graphes simples de type Lie donc le résultat est une exponentielle.

La composante logarithmique de $B_\pi(e^X, e^Y)$ dans \mathfrak{p} est donc $X + Y$ et celle dans \mathfrak{k} s'écrit $H(X, Y)$, avant restriction à $\lambda + \mathfrak{k}^\perp$.

Seuls les graphes avec des roues vont intervenir de manière significatif.

Définition 3. *On note $E(X, Y)$ les contributions de tous les graphes de type roues. C'est une fonction analytique en X, Y près de 0.*

On a donc :

$$B_\pi(e^X, e^Y) = E_\lambda(X, Y)e^{X+Y},$$

avec

$$E_\lambda(X, Y) := e^{\lambda(H(X, Y))} E(X, Y).$$

La fonction $E_\lambda(X, Y)$ est le symbole formel du star-produit de Cattaneo-Felder associé à la sous-variété co-isotrope $\lambda + \mathfrak{k}^\perp$.

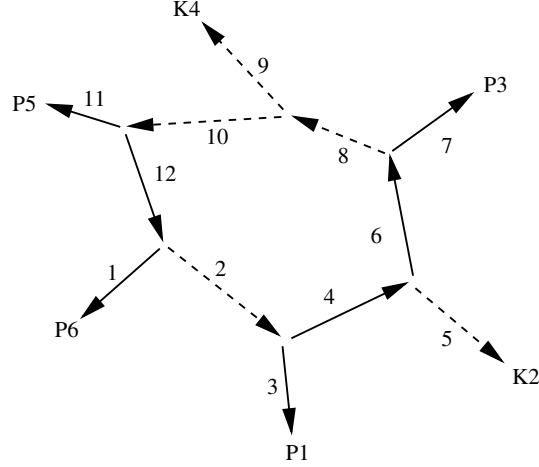


FIG. 15 – Roue type contribuant dans $E(X, Y)$

Lemme 11. *On a la symétrie suivante $E_\lambda(X, Y) = E_{-\lambda}(Y, X)$.*

Preuve : Dans une roue, comme Fig. 15, lorsqu'il y a une sortie colorée par \mathfrak{p}^* alors il y a un changement de couleur dans la roue. En définitive, le nombre de changements de couleur est pair, c'est à dire qu'une telle roue est attachée à un nombre pair de sortie dans \mathfrak{p} , disons $2p$ et à un nombre q de sorties dans \mathfrak{k} . Par ailleurs un sous-diagramme (de type Lie) avec sommet dans \mathfrak{p} a un nombre pair de sommets, et chaque diagramme avec sommet dans \mathfrak{k} a un nombre impair de sommet (car les "pattes" de ces diagrammes sont attachées sur e^X, e^Y , c'est à dire que les pattes sont colorées par \mathfrak{p}^*). Il y a donc $2p + q$ sommets dans la roue et $q \pmod{2}$ sommets en dehors de la roue. Au total on a un nombre pair de sommets dans Γ .

Faisons une symétrie axiale. On a

$$\Gamma^\vee(X, Y) = \Gamma(Y, X)$$

et

$$w_{\Gamma^\vee} = (-1)^{\#\{\text{sommets}\}} w_{\Gamma^\vee} = w_\Gamma,$$

ce qui montre la symétrie recherchée.

Pour les diagrammes de type Lie, qui contribuent pour la composante dans \mathfrak{k} , on obtient $w_{\Gamma^\vee} = -w_\Gamma$, car on a un nombre impair de sommets. ■

Définition 4. *On définit le produit (de Cattaneo-Felder) $\star_{CF, \lambda}$ sur $S(\mathfrak{p})$ par*

la relation pour $f, g \in S(\mathfrak{p}) = C_{poly}(\mathfrak{k}^\perp)$ et $\xi \in \mathfrak{k}^\perp = \mathfrak{p}^*$:

$$(f \star_{CF, \lambda} g)(\xi) = B_\pi(f, g) = E_\lambda(\partial_\xi, \partial_\eta)(f \otimes g)|_{\xi=\eta}.$$

Pour $\lambda = 0$ on notera ce produit \star_{CF} .

Corollaire 4. Par construction le produit $\star_{CF, \lambda}$ est associatif sur $S(\mathfrak{p})^\mathfrak{k}$ et vérifie $f \star_{CF, \lambda} g = g \star_{CF, -\lambda} f$.

Le corollaire suivant précise le corollaire 3 §2.1 et décrit ce qui se passe en cohomologie.

Corollaire 5. Le produit associatif de Cattaneo-Felder dans $H^\bullet(\mathfrak{k}, S(\mathfrak{p}))$ est donc donné par l'action de l'opérateur E sur les coefficients. C'est à dire que le produit en cohomologie est l'extension du produit sur $S(\mathfrak{p})^\mathfrak{k}$.

Preuve : Si une arête issue de l'axe réel intervient dans un graphe (cf. Fig. 16), il existerait une arête colorée par \mathfrak{k}^* qui sortirait à l'infini. Or au sommet d'où part une telle arête, on aura deux arêtes de même couleur qui se suivent et donc le coefficient sera nul (cf. lemme 6 §2).

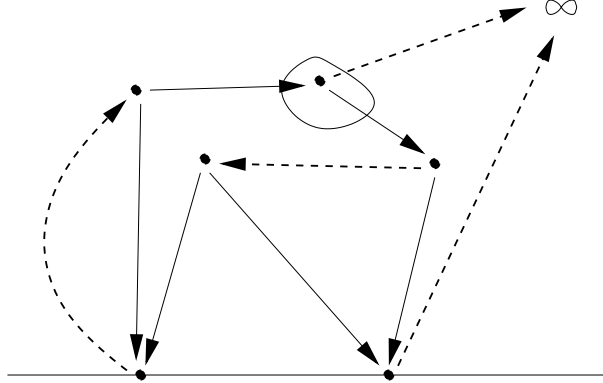


FIG. 16 – Graphe intervenant dans le calcul du star-produit dans l'espace $H^\bullet(\mathfrak{k}, S(\mathfrak{p}))$

■

3.2 Contributions dans $E(X, Y)$

Nous exploitons une symétrie pour les graphes qui interviennent dans $E(X, Y)$. Pour $X, Y \in \mathfrak{p}$ on note $x = \text{ad}X$ et $y = \text{ad}Y$ les opérateurs adjoints.

Proposition 7. Dans le logarithme de $E(X, Y)$ interviennent des termes de la forme

$$w_{\Gamma} \left(\text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdots x_n) + (-1)^{n-1} \text{tr}_{\mathfrak{k}}(x_n \cdots x_2 x_1) \right)$$

avec w_{Γ} le coefficient associé à un graphe coloré de type roue et $x_i = \text{ad} X_i$ où X_i est un mot de type Lie en X, Y .

Preuve : En faisant tourner les roues dans les deux sens en changeant la coloration des arêtes pour conserver la même forme Ω_{Γ} on va obtenir une information intéressante.

Par exemple sur Fig. 17 les arêtes 2, 4, 6, 8, 10 se retrouvent dans la forme Ω_{Γ} qui calcule le poids en position 10, 8, 6, 4, 2. Comme on a inversé le sens des arêtes la forme est la même au signe donné par la signature de l'inversion de numérotation dans la roue ; sur l'exemple Fig. 17 on a donc $(-1)^4 = 1$. On trouve donc

$$w_{\Gamma} \left(\text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_5 x_1 x_2 x_3 x_4) + \text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_5 x_4 x_3 x_2 x_1) \right)$$

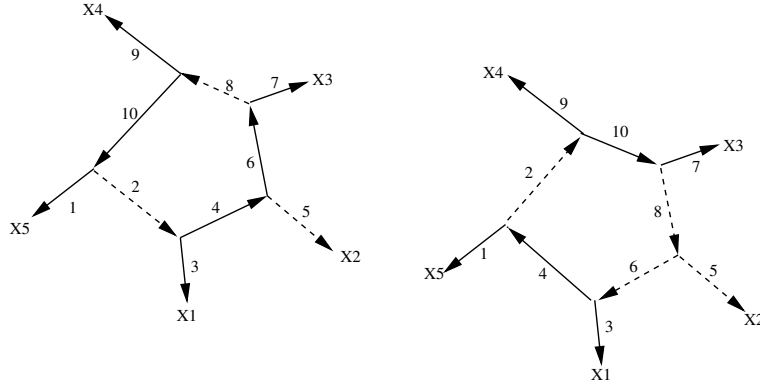


FIG. 17 – Roue dans un sens et dans l'autre

Si l'un des X_i est dans \mathfrak{p} par exemple X_1 (recevant la couleur \mathfrak{p}^* dans la roue) alors on trouve des contributions de la forme

$$\text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdots x_n)$$

et

$$(-1)^{n-1} \text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdot x_n \cdot x_{n-1} \cdots x_2) = (-1)^{n-1} \text{tr}_{\mathfrak{k}}(x_n \cdots x_2 x_1).$$

Au total on a

$$\text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdots x_n) + (-1)^{n-1} \text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 x_n \cdots x_2) = \text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdots x_n) + (-1)^{n-1} \text{tr}_{\mathfrak{k}}(x_n \cdots x_2 x_1).$$

Si tous les X_i sont dans \mathfrak{k} on trouve comme l'illustre Fig. 18

$$\text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdots x_n) + (-1)^{n-1} \text{tr}_{\mathfrak{k}}(x_1 x_n \cdots x_2) = \text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdots x_n) + (-1)^{n-1} \text{tr}_{\mathfrak{k}}(x_n \cdots x_2 x_1).$$

■

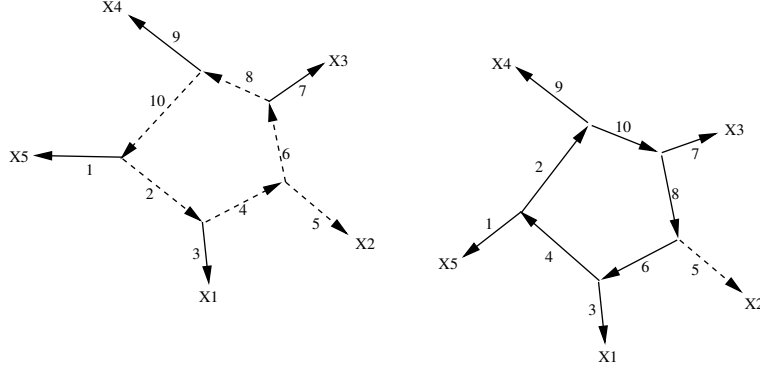


FIG. 18 – Roue dans un sens et dans l'autre lorsque tous les X_i sont dans \mathfrak{k}

Remarque : Si les X_i commutent modulo des éléments nilpotents, on ne trouve que des roues pures dans la formule et ces dernières contribuent pour 0.

3.3 Cas résoluble

Proposition 8. *Quand (\mathfrak{g}, σ) est une paire symétrique résoluble, ou bien quand X, Y sont dans un idéal résoluble, la fonction $E(X, Y)$ vaut 1.*

Corollaire 6. *Pour toute paire symétrique (\mathfrak{g}, σ) , on a $f \star_{CF} g = fg$ pour f, g des polynômes \mathfrak{k} -invariants dans l'algèbre symétrique $S(J)^\mathfrak{k}$ où J est idéal σ -stable et résoluble de \mathfrak{g} .*

Preuve : Ceci résulte immédiatement de la remarque précédente. Dans le cas résoluble la fonction $E(X, Y)$ vaut 1, car les crochets $[X, Y]$ sont unipotents. Donc il n'y a que des roues pures de tailles $2n$. On a donc des termes de la forme (avec $X_i \in \mathfrak{p}$ et $x_i = \text{ad}X_i$)

$$w_\Gamma(\text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \dots x_{2n}) - \text{tr}_{\mathfrak{k}}(x_1 \dots x_{2n})) = 0,$$

car on peut permuter les termes deux à deux (ça fait apparaître un élément unipotent), et on peut changer la trace sur \mathfrak{k} en une trace sur \mathfrak{p} pour la même raison. ■

On peut appliquer la proposition au cas où $X = \pm Y$ et on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 7. *On a $E(X, X) = 1 = E(X, -X)$ c'est à dire que les roues pures apportent des contributions nulles.*

On montrera au théorème 4 §4.1.3 que le produit \star_{CF} et le produit de Rouvière coïncident sur $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$. On déduit de la proposition précédente une autre preuve du résultat fondamental de Rouvière [26] :

Théorème 2 ([26], théorème 5.1). *La formule de Rouvière est un isomorphisme pour la convolution des germes de distributions K -invariantes sur l'espace symétrique résoluble G/K .*

3.4 Propriétés supplémentaires

Lemme 12. *La fonction $E(X, Y)$ ne dépend que d'une composante réductive \mathfrak{r} de \mathfrak{g} . Cette fonction est la même que pour la paire symétrique dégénérée $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{r} \ltimes (\mathfrak{g}_u)_{ab}$.*

Corollaire 8. *Le produit \star_{CF} ne fait pas intervenir de dérivées d'éléments unipotents.*

Une autre conséquence de la proposition 7 est que $\log(E(X, Y))$ s'écrit $\mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(A)$ où A est dans l'idéal bilatère engendré par $\mathrm{ad}[X, Y] = xy - yx$.²⁶ En effet si dans les roues il y a déjà une branche dans \mathfrak{k} l'élément est clairement dans l'idéal. Si tous les termes sont dans \mathfrak{p} , alors on trouve

$$w_{\Gamma}(\mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \dots x_{2n}) - \mathrm{tr}_{\mathfrak{k}}(x_1 \dots x_{2n})).$$

On peut donc écrire

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \dots x_{2n}) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(x_2 x_1 \dots x_{2n}) + \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}([x_1, x_2] x_3 \dots x_{2n}),$$

ce qui montre que la différence ci-dessus s'écrit $\mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(A)$ avec A dans l'idéal engendré par $\mathrm{ad}[X, Y]$. On retrouve ainsi le résultat de [30] Théorème 3.15 page 260.

3.5 Calculs numériques des premiers termes dans $E(X, Y)$

3.5.1 Composante sur \mathfrak{k}

On calcule d'abord le poids des graphes qui vont intervenir à l'ordre 4. Ces calculs se font en utilisant la formule de Stokes et sont détaillés dans les Fig. 19, Fig. 20, Fig. 21 et Fig. 22.

On trouve au final le développement suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{-1}{24}[X, [X, [X, Y]]] + \frac{-1}{24}[Y, [Y, [X, Y]]] \\ + \frac{-1}{48}[X, [Y, [X, Y]]] + \frac{-1}{48}[Y, [X, [X, Y]]]. \end{aligned}$$

²⁶Ce genre de résultat devrait s'énoncer plus correctement dans l'algèbre libre engendrée par $\mathrm{ad}X, \mathrm{ad}Y$.

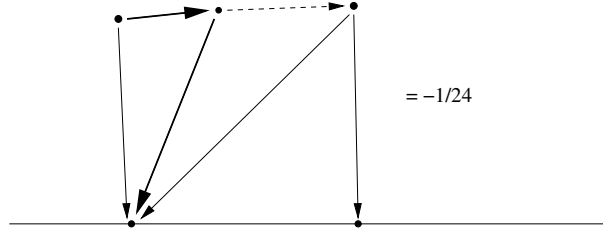


FIG. 19 – Graphe $[X, [X, [X, [Y]]]]$

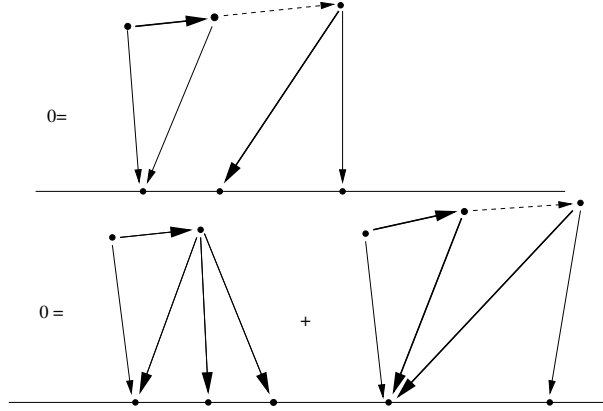


FIG. 20 – Calcul du poids du graphe $[X, [X, [X, [Y]]]]$

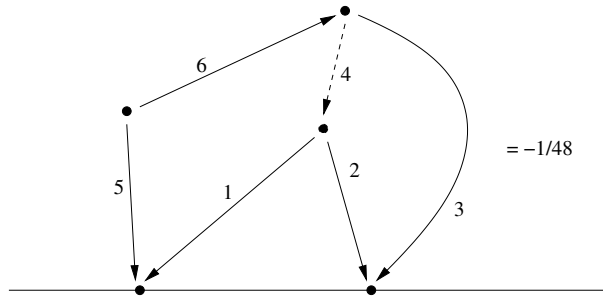


FIG. 21 – Graphe $[X, [Y, [X, [Y]]]]$

Cas du caractère $\lambda = \frac{1}{2}\text{tr}_{\mathfrak{k}}\text{ad}$: En posant $x = \text{ad}X$ et $y = \text{ad}Y$, lorsque le caractère λ de la sous-algèbre \mathfrak{k} vaut $\frac{1}{2}\text{tr}_{\mathfrak{k}}\text{ad}$, on peut écrire ce terme à l'ordre 4 sous la forme :

$$\frac{1}{4}\text{tr}_{\mathfrak{k}}(xy - yx) + \frac{1}{12}\text{tr}_k(x^3y - y^3x - y^3x + xy^3) + \frac{1}{24}\text{tr}_k((yx)^2 - (xy)^2)$$

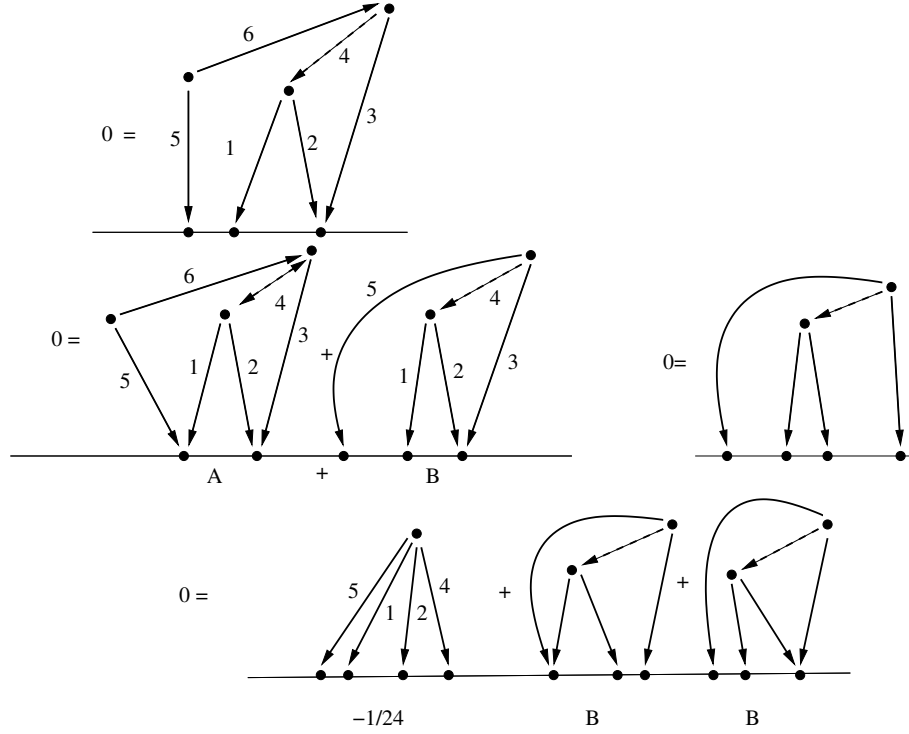


FIG. 22 – Calcul du poids du graphe $[X, [Y, [X, [Y]]]]$

qui est bien l'expression que l'on trouve dans [27] page 256.

3.5.2 Composante scalaire

On regarde les contributions à l'ordre 4 en X, Y en fonction de la taille des roues afin de comparer notre fonction $E(X, Y)$ à celle de Rouvière $e(X, Y)$.

Pour les roues de taille 2 : Les arêtes sortantes sont colorées par \mathfrak{k}^* , sinon on a une arête double. On trouve pour le terme de degré 4 en X, Y une expression de la forme :

$$w_{\Gamma}(\mathrm{tr}_{\mathfrak{p}} - \mathrm{tr}_{\mathfrak{k}})(\mathrm{ad}[X, Y]\mathrm{ad}[X, Y]),$$

qui fait intervenir la différence des formes de Killing sur \mathfrak{g} et \mathfrak{k} car on a

$$b(A, B) := \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(\mathrm{ad}A\mathrm{ad}B) - \mathrm{tr}_{\mathfrak{k}}(\mathrm{ad}A\mathrm{ad}B) = K_{\mathfrak{g}}(A, B) - 2K_{\mathfrak{k}}(A, B).$$

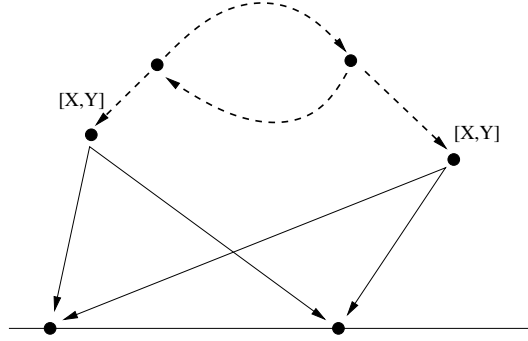


FIG. 23 – Roue $[X, Y], [X, Y]$

Les termes d'ordre 6 pour les roues de taille 2 se présentent sous la forme $b([X, Y], u[X, Y])$, comme écrit dans [27]. C'est assez conforme à une conjecture de [27] qui est que le logarithme de la fonction $e(X, Y)$ s'écrit $b([X, Y], u[X, Y])$ avec u une série paire en x, y .

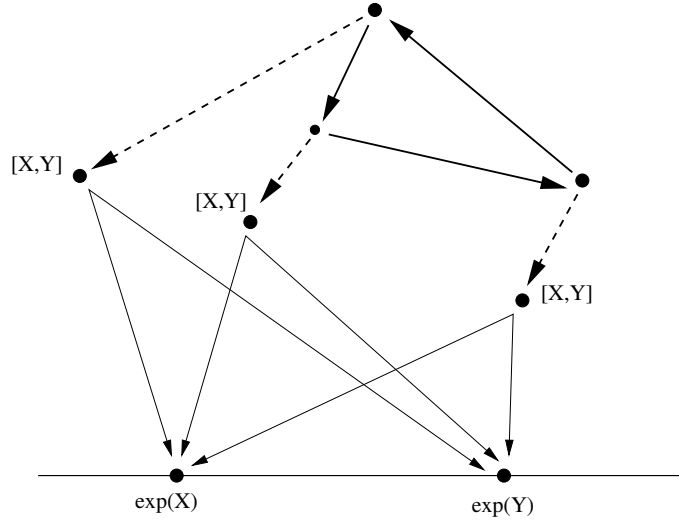


FIG. 24 – Roue de taille 3 attachée à $[X, Y], [X, Y], [X, Y]$

Pour les roues d'ordre 3 : S'il y a 3 sorties dans \mathfrak{k}^* , le degré le plus faible est 6 et on trouve des roues faisant intervenir un terme de la forme

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{k}\mathrm{ad}^3}[X, Y] + \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}\mathrm{ad}^3}[X, Y] = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}\mathrm{ad}^3}[X, Y].$$

Cette contribution est nulle pour toute algèbre de Lie car on a

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}Z)^{2n+1} = 0,$$

pour $Z \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ comme on s'en convainc facilement.²⁷

Par contre les contributions **avec 2 sorties dans \mathfrak{p}^*** fournissent des contributions d'ordre 4 de la forme suivante (selon les sorties) :

i– Cas $[X, Y], X, Y$:

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}\left(\mathrm{ad}[X, Y]\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y\right) + \mathrm{tr}_{\mathfrak{t}}\left(\mathrm{ad}[X, Y]\mathrm{ad}Y\mathrm{ad}X\right).$$

Par symétrie on trouve des contributions de la forme :

$$w_{\Gamma}(\mathrm{tr}_{\mathfrak{p}} - \mathrm{tr}_{\mathfrak{t}})\left(\mathrm{ad}[X, Y]\mathrm{ad}[X, Y]\right) = b([X, Y], [X, Y]).$$

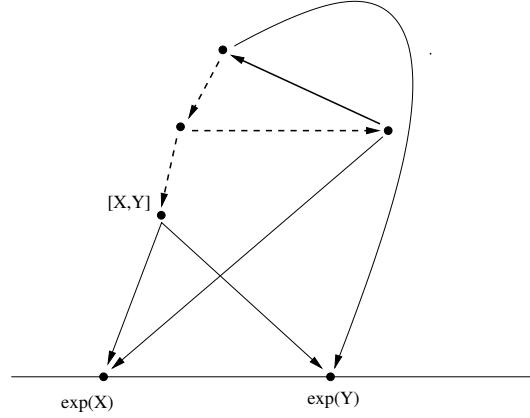


FIG. 25 – Roue de taille 3 attachée à $[X, Y], X, Y$

ii– Cas $[X, Y], X, X$: Il reste donc les contributions de la forme :

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}\left(\mathrm{ad}[X, Y]\mathrm{ad}X\mathrm{ad}X\right) + \mathrm{tr}_{\mathfrak{t}}\left(\mathrm{ad}[X, Y]\mathrm{ad}X\mathrm{ad}X\right) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\mathrm{ad}[X, Y]\mathrm{ad}X\mathrm{ad}X\right).$$

²⁷On peut alors supposer que Z est dans un facteur semi-simple et pour toute représentation τ de dimension finie d'une algèbre semi-simple on a $\mathrm{tr}(\tau(x)^{2n+1}) = 0$, car on peut par exemple unitariser les représentations.

Or on a

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\mathrm{ad}[X, Y]\mathrm{ad}X\mathrm{ad}X\right) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left((\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y - \mathrm{ad}Y\mathrm{ad}X)\mathrm{ad}X\mathrm{ad}X\right) = 0,$$

donc la contribution ci-dessus est nulle.

Pour les roues d'ordre 4 : Le calcul à l'ordre 4, montre que les arêtes issues de la roue vont directement sur e^X, e^Y , ce sont donc des roues pures. On examine les contributions selon la distribution possible des arêtes :

i– Cas X, Y, X, Y : On trouve, compte tenu de la propriété des roues (dans un sens et dans l'autre) :

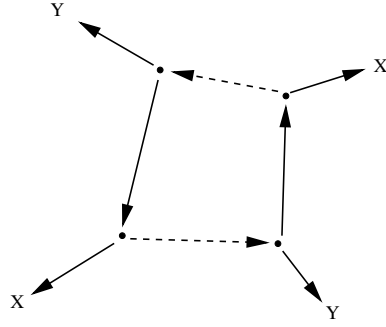


FIG. 26 – Roue de taille 4 attachée à X, Y, X, Y

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{t}}(xyxy) - \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(xyxy),$$

et par symétrie on trouve

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{t}}(xyxy) - \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(xyxy) + \mathrm{tr}_{\mathfrak{t}}(yxyx) - \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(yxyx) = 0.$$

ii– Cas X, X, Y, Y :

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{t}}(xxxy) - \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(xyyx) = 0.$$

iii– Cas X, X, X, Y (ou Y, Y, Y, X) :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(xxxy) - \mathrm{tr}_{\mathfrak{t}}(xyxx) &= \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(xx[x, y]) = -\mathrm{tr}_{\mathfrak{t}}(xx[x, y]) = \\ &= -\mathrm{tr}_{\mathfrak{t}}(x^3y - yx^3) = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}_{\mathfrak{t}}([X, [X, [X, Y]]]). \end{aligned}$$

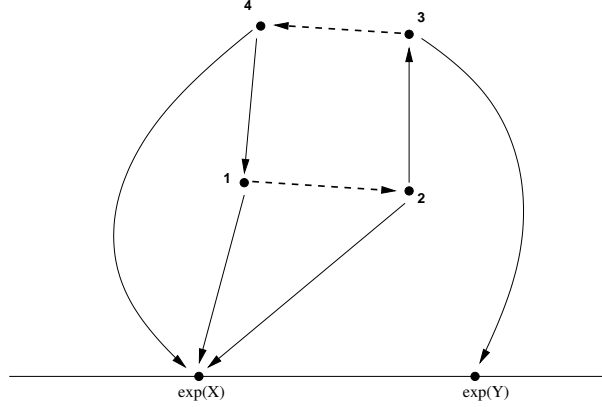


FIG. 27 – Roue de taille 4 attachée à X, X, X, Y

Ce terme n'apparaît pas dans les calculs de Rouvière à l'ordre 4. Toutefois le coefficient associé à ce graphe est nul, car on peut intervertir les positions 2 et 4 dans le graphe Fig. 27 ce qui échange 3 groupes de 2 arêtes.

On résume ces calculs par la proposition suivante :

Proposition 9. *Les termes jusqu'à l'ordre 4 dans la fonction $E_{\frac{1}{2}\text{tr}_k}(X, Y)$ coïncident avec la fonction $e(X, Y)$ de Rouvière.*

Preuve : D'après les calculs précédents les contributions scalaires à l'ordre 4 correspondent à un terme de la forme

$$\exp \left(c(\text{tr}_{\mathfrak{p}} - \text{tr}_{\mathfrak{k}})(\text{ad}[X, Y])^2 + \dots \right).$$

On verra au théorème 4 §4.1.3 que le produit de Cattaneo-Felder coïncide avec celui de Rouvière ce qui montre que la constante c est uniquement déterminée par un calcul explicite. On peut le faire dans $sl(2)$ et on trouve $c = 1/240$ résultat conforme (au signe près) à celui de Rouvière ([28] page 257).

Voici le détail du calcul : $\widehat{H}, \widehat{X}, \widehat{Y}$ désigne la base de $sl(2)$ et $\mathfrak{k} = \langle \widehat{X} - \widehat{Y} \rangle$ et $\mathfrak{p} = \langle \widehat{H}, \widehat{X} + \widehat{Y} \rangle$. On pose $\omega = \widehat{H}^2 + (\widehat{X} + \widehat{Y})^2$ et $\Omega = \beta(\omega)$. On a pour $X \in \mathfrak{p}$

$$\begin{aligned} J^{1/2}(X) = \exp \left(\frac{1}{12} \text{tr}_{\mathfrak{p}}(\text{ad}^2 X) - \frac{1}{1440} \text{tr}_{\mathfrak{p}}(\text{ad}^4 X) \dots \right) = \\ 1 + \frac{1}{12} \text{tr}_{\mathfrak{p}}(\text{ad}^2 X) + \frac{1}{360} \text{tr}_{\mathfrak{p}}(\text{ad}^4 X) + \dots \end{aligned}$$

On trouve $\partial_{J^{1/2}}(\omega^2) = \omega^2 + \frac{16}{3}\omega + \frac{128}{45}$ et $\beta(\omega^2) = \Omega^2 - \frac{8}{3}\Omega \pmod{U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}}$.

Au final on a modulo $U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}$

$$\begin{aligned} \partial_{J^{1/2}}(\omega^2) \cdot \partial_{J^{1/2}}(\omega^2) &= \Omega^2 + \frac{8}{3}\Omega + \frac{16}{3} = \\ &= \beta \left(\partial_{J^{1/2}}(\omega^2 - \frac{128}{45} + \frac{16}{3}) \right) = \beta \left(\partial_{J^{1/2}}(\omega^2 - \frac{16}{15}) \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs pour $sl(2)$ on calcule $(\text{tr}_{\mathfrak{p}} - \text{tr}_{\mathfrak{k}})(\text{ad}^2[X, Y])$ agissant comme opérateur bidifférentiel sur $\omega \otimes \omega$. On trouve -256 , la constante vaut donc $\frac{16}{15 \times 256} = \frac{1}{240}$. ■

3.6 Cas quadratique

On dit qu'une paire symétrique (\mathfrak{g}, σ) est quadratique si elle est munie d'une forme bilinéaire invariante et non dégénérée (mais on ne suppose pas que c'est la forme de Killing!).

3.6.1 Cas des paires d'Alekseev-Meinrenken

C'est par définition le cas des paires quadratiques pour lesquelles la forme bilinéaire est **σ -anti-invariante**. On a alors les identifications $\mathfrak{p}^* \sim \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{k}^* \sim \mathfrak{p}$. En utilisant la proposition 7 on trouve :

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdots x_n) + (-1)^{n-1} \text{tr}_{\mathfrak{k}}(x_n \cdots x_1) &= \text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdots x_n) + \\ (-1)^{n-1} \text{tr}_{\mathfrak{p}^*}(x_n \cdots x_1) &= \text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdots x_n) - \text{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdots x_n) = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

On en déduit le résultat important suivant :

Proposition 10. *Pour une paire symétrique d'Alekseev-Meinrenken la fonction E vaut 1.*

Dans le théorème 4 §4.1.3, comme déjà annoncé, on fera le lien entre la fonction E et le produit de Rouvière, ce qui entraînera notamment que notre fonction E décrit la convolution des distributions K -invariantes sur l'espace symétrique G/K . Par conséquent on retrouve un résultat démontré par Alekseev-Meinrenken [1] et Torossian [35], à savoir que la symétrisation modifiée par la racine carrée du jacobien est un isomorphisme d'algèbres dans le cas des paires symétriques avec forme σ -anti-invariante. Dans notre situation on démontre une conjecture formulée dans [35] : cet isomorphisme s'étend aux germes de distributions invariantes car la fonction $E(X, Y)$ vaut 1. On résume la situation par le théorème suivant :

Théorème 3. *Pour une paire symétrique d'Alekseev-Meinrenken, la formule de Rouvière est encore un isomorphisme au niveau des germes de distributions K -invariantes.*

3.6.2 Cas quadratique σ -invariant

C'est par définition le cas des paires quadratiques pour lesquelles la forme bilinéaire est σ -invariante. On a alors les identifications $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{p}^*$ et $\mathfrak{k} \sim \mathfrak{k}^*$ et l'endomorphisme transposé vérifie ${}^t\mathrm{ad}X = -\mathrm{ad}X$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdots x_n) + (-1)^{n-1} \mathrm{tr}_{\mathfrak{k}}(x_n \cdots x_1) &= \\ \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdots x_n) + (-1)^{n-1} \mathrm{tr}_{\mathfrak{k}^*}(x_n \cdots x_1) &= \mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdots x_n) - \mathrm{tr}_{\mathfrak{k}}(x_1 \cdots x_n). \end{aligned}$$

Si de plus la paire symétrique est très-symétrique²⁸, alors par un calcul élémentaire en termes de matrices blocs 2×2 on trouve :

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{p}}(x_1 \cdots x_n) - \mathrm{tr}_{\mathfrak{k}}(x_1 \cdots x_n) = 0.$$

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 11. *Si (\mathfrak{g}, σ) est une paire très-symétrique et quadratique avec forme σ -invariante, alors la fonction E vaut 1.*

Par exemple une algèbre de Lie considérée comme un espace symétrique est une paire très-symétrique, car on a $\sigma(x, y) = (y, x)$ et $A(x, y) = (x, -y)$. Pour une paire symétrique complexe, on peut prendre pour A la multiplication par i . La proposition ci-dessus s'applique notamment dans le cas des algèbres de Lie quadratiques vues comme des paires symétriques.

Corollaire 9. *Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie quadratique vue comme une paire symétrique, alors la fonction E vaut 1.*

3.7 Équation différentielle d'évolution pour le fonction E

3.7.1 Cas des algèbres de Lie

Dans le cas des algèbres de Lie, la fonction de densité issue des travaux de Kontsevich est factorisée. Pour Γ un graphe on a noté $\Gamma(X, Y)$ le symbole formel de l'opérateur B_Γ (cf. [9] pour toutes ces notions). La fonction de densité correspond aux contributions des roues dans la formule de Kontsevich pour les algèbres de Lie.

On a donc par définition

²⁸Une paire symétrique est dite très-symétrique s'il existe un opérateur A sur \mathfrak{g} tel que $A \circ \mathrm{ad}X = \mathrm{ad}X \circ A$ avec $A : \mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{k}$.

$$D(X, Y) = \exp \left(\sum_{\Gamma \text{ of wheel type}} \frac{w_\Gamma}{m_\Gamma} \Gamma(X, Y) \right),$$

avec m_Γ le cardinal du groupe de symétries du graphe géométrique. La somme porte sur les graphes géométriques, c'est à dire les graphes où l'on a oublié la numérotation.

D'après [9] § 8.5 on a la factorisation importante :

$$D(X, Y)^2 = \frac{A(X)A(Y)}{A(Z(X, Y))}$$

avec $A(X)$ les contributions des roues attachées aux points $X, -X$. En fait on a $A(X) = D(X, -X)$ et $Z(X, Y)$ la série de Baker-Campbell-Hausdorff. Cette factorisation est essentielle et démontre l'isomorphisme de Duflo dans le cas des algèbres de Lie. Elle se démontre simplement en positionnant les points e^X, e^Y, e^{-Y}, e^{-X} en position symétrique sur l'axe réel, comme dans Fig. 28.

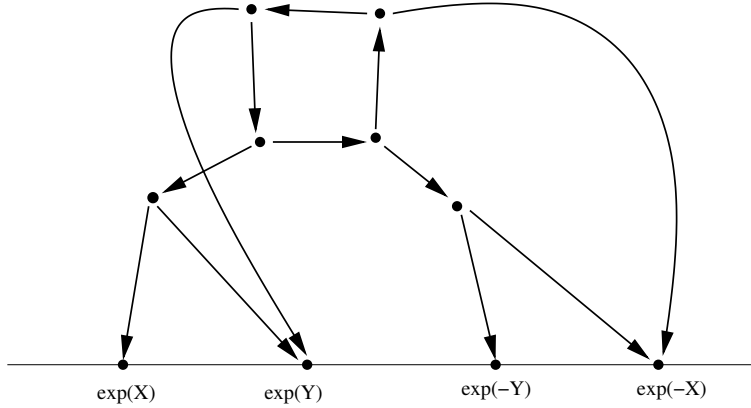


FIG. 28 – Roue intervenant dans le calcul de $D(X, Y)$

La fonction de densité à 4 points est indépendante de la position des points sur l'axe réel. En faisant se rapprocher les points e^Y, e^{-Y} on trouve la factorisation $A(X)A(Y)$ et en faisant se rapprocher les points e^X, e^Y on trouve pour contribution $D^2(X, Y)A(Z(X, Y))$. Au final on trouve que la fonction de densité se factorise comme annoncé et que la fonction $A(X)$ est paire. L'unicité de l'isomorphisme de Duflo, permet de calculer la fonction qui vaut alors :

$$A(X) = \det_{\mathfrak{g}} \left(\frac{\sinh(\frac{\text{ad} X}{2})}{(\frac{\text{ad} X}{2})} \right).$$

3.7.2 Cas des paires symétriques

Dans le cas des paires symétriques, la fonction de densité dépend de la position des points et on ne peut pas conclure comme dans le cas des algèbres de Lie.

Notons $D_s(X, Y)$ la fonction obtenue en plaçant en position symétrique²⁹ notée s les points $(e^X, e^Y, e^{-Y}, e^{-X})$ sur l'axe réel.

L'équation d'évolution s'obtient grace à la formule de Stokes. C'est une équation semblable à celle obtenue dans [32] qui a permis la démonstration de la conjecture de Kashiwara-Vergne [2].

$$\begin{aligned} dD_s(X, Y) &= [X, F_s(X, Y)] \cdot \partial_X D_s(X, Y) + [Y, G_s(X, Y)] \cdot \partial_Y D_s(X, Y) + \\ &\quad \left(\text{tr}_{\mathfrak{k}} \partial_X F_s(X, Y)(X, Y) \circ \text{ad} X + \text{tr}_{\mathfrak{k}} \partial_Y G_s(X, Y) \circ \text{ad} Y \right) D_s(X, Y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Cette équation est obtenue en considérant les symétries sur les graphes. Les champs adjoints apparaissent car les concentrations réelles ne sont pas nulles s'il part une flèche provenant de \mathfrak{k}^* . Dans cette formule $F_s(X, Y)$ est une 1-forme en s et correspond à toutes les contributions des graphes étendus $\hat{\Gamma}$ avec une arête issue du point $\exp(X)$ (cf. [9]). Le coefficient associé va définir une 1-forme en s que l'on note $w_{\hat{\Gamma}}(s)ds$. Cette arête issue de l'axe réel dérive la racine d'un graphe de type Lie noté Γ et dont le symbole $\Gamma(X, Y, -X, -Y) = B_{\Gamma}(e^X, e^Y, e^{-X}, e^{-Y})$ est dans \mathfrak{k} . On définit alors

$$F_s(X, Y) = \sum w_{\hat{\Gamma}}(s) \Gamma(X, Y, -X, -Y) ds.$$

On fait de même pour le champ G_s qui correspond aux contributions avec une arête issue du point $\exp(Y)$.

Les conditions limites dans l'équation d'évolution : Les conditions limites dans ce cas sont plus simples. En effet d'après § 3.1 la composante dans \mathfrak{p} de $B_{\pi}(e^X, e^Y)$ se réduit à $X + Y$. Les conditions limites sont donc d'une part $A(X)A(Y)$ et d'autre part $E(X, Y)^2 A(X + Y)$ où on a encore noté $A(X)$ les contributions des roues pures attachées aux points $X, -X$.

²⁹Le paramètre s pourra varier de $s = 0$ pour la condition limite e^Y, e^{-Y} confondus à $s = \frac{1}{2}$ pour la condition limite e^X, e^Y confondus.

Les roues qui interviennent dans $A(X)$ sont de taille $2n$, et il y a alternance de flèches \longrightarrow et \dashrightarrow . Grâce la symétrie de la proposition 7 on en déduit que la série $A(X)$ vaut 1. Donc la condition limite pour D_s sont donc

$$E^2(X, Y) \quad \text{et} \quad 1.$$

Attention : On n'a pas une interpolation triviale entre 1 et $E^2(X, Y)$ sur les éléments \mathfrak{k} -invariants. En d'autre termes la déformation $f *_s g$ pour $f, g \in S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ et $\xi \in \mathfrak{k}^\perp = \mathfrak{p}^*$

$$(f *_s g)(\xi) = D_s(\partial_\xi, \partial_\eta)(f \otimes g)|_{\xi=\eta}$$

n'est pas constant en s . En effet, pour cela il faudrait que l'on ait $[X, F_s] + [Y, G_s] = 0$ ce qui n'est pas assuré.

En introduisant les solutions des équations différentielles dans le groupe K , d'algèbre de Lie \mathfrak{k} avec condition initiale triviale pour $s = 0$

$$d(a_s) = F_s a_s \quad \text{et} \quad db_s = G_s b_s.$$

Comme dans [27, 28, 30], la fonction $s \mapsto D_s(a_s \cdot x, b_s \cdot y)$ vérifie une équation différentielle du type $y'(s) = \mu(s)y(s)$ ce qui donne une formule pour $y(s)$. Finalement on trouve après calcul, en prenant $s = 0$ pour la condition limite e^Y, e^{-Y} confondus et $s = \frac{1}{2}$ pour la condition limite e^X, e^Y confondus :

Proposition 12. *On a l'expression de la fonction $E(X, Y)$ suivante*

$$E(X, Y) = \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^{1/2} \text{tr}_{\mathfrak{k}} \left(\partial_X F_s(a_s \cdot X, b_s \cdot Y) \circ \text{ad}(a_s \cdot X) + \partial_Y G_s(a_s \cdot X, b_s \cdot Y) \circ \text{ad}(b_s \cdot Y) \right) ds \right).$$

3.7.3 Equation d'évolution dans l'algèbre de Weyl

Dans cette sous-section, nous allons "faire disparaître les traces" qui réalisent les divergences. Considérons D_s comme un élément de $S((\mathfrak{p}^* \oplus \mathfrak{p}^*))$ c'est à dire un opérateur bi-différentiel d'ordre infini. Nous allons transposer l'équation d'évolution en une équation dans l'algèbre de Weyl sur la variété $\mathfrak{p}^* + \mathfrak{p}^*$.

On remarque d'abord que si $a(X)$ est une fonction sur V espace vectoriel, alors $a(\partial) \in S(V^*)$ est un opérateur différentiel à coefficients constants sur V^* et on a comme opérateur sur V^* pour $e_i \in V$ (vu comme fonction linéaire sur V^*)

$$(\partial_{e_i} a)(\partial) = a(\partial) e_i - e_i a(\partial).$$

Appliquons ceci à notre situation, où on note par l'exposant (X) (resp. (Y)) la première variable (resp. la deuxième variable) dans $\mathfrak{p}^* \oplus \mathfrak{p}^*$.

Considérons dans l'équation d'évolution le terme

$$[X, F_s(X, Y)] \cdot \partial_X D_s(X, Y)$$

et notons $(P_j)_j$ une base de \mathfrak{p} , $(K_i)_i$ une base de \mathfrak{k} . On note $F_s(X, Y) = \sum_i F_i(X, Y) K_i$ avec $F_i(X, Y) \in \mathbb{R}$. Le terme $[X, F_s(X, Y)] \cdot \partial_X D_s(X, Y)$ correspond alors à l'opérateur, via la relation de commutation que l'on utilise deux fois :

$$\begin{aligned} \sum_{j,i} \partial_j D_s \left(\langle [P_l, K_i], P_j^* \rangle F_i \partial_{P_l^*} \right) = \\ D_s \left([P_l, K_i] F_i (\partial_X, \partial_Y) \partial_{P_l^*} \right) - [P_l, K_i]^{(X)} D_s F_i \partial_{P_l^*} = \\ D_s F_i \left([P_l, K_i]^{(X)} \partial_{P_l^*}^{(X)} \right) - D_s \left(\partial_{[P_l, K_i]} F_i \partial_{P_l^*} - [P_l, K_i]^{(X)} D_s F_i \partial_{P_l^*} \right). \end{aligned}$$

Cette expression correspond au terme

$$D_s F_i \left([P_l, K_i]^{(X)} \partial_{P_l^*}^{(X)} \right) - [X, F]^{(X)} D_s - D_s \left(\text{tr}_{\mathfrak{k}} \partial_X F \circ \text{ad} X \right).$$

En définitive l'équation d'évolution s'écrit comme opérateur bi-différentiel

$$\begin{aligned} dD_s(X, Y) = - \left([X, F_s]^{(X)} + [Y, G_s]^{(Y)} \right) D_s + \\ D_s \left(F_i [P_l, K_i]^{(X)} \partial_{P_l^*}^{(X)} + G_i [P_l, K_i]^{(Y)} \partial_{P_l^*}^{(Y)} \right). \quad (3.3) \end{aligned}$$

On reconnaît dans le second terme l'action du champ adjoint et le terme *a priori* non nul

$$[X, F] + [Y, G] \neq 0,$$

ce qui explique que l'équation d'évolution qui gouverne l'interpolation des produits associés à D_s n'est pas constante même appliquée sur les éléments \mathfrak{k} -invariants.

3.8 Problèmes non résolus

I– Dans le cas des algèbres de Lie quadratiques vues comme paires symétriques, nous pensons que le fait que notre fonction E soit égale à 1 est sans doute équivalent à la conjecture de Kashiwara-Vergne [36] dans ce cas. On sait que la conjecture de Kashiwara-Vergne admet une preuve particulière dans le cas quadratique qui ne s'étend pas au cas général.

II– On ne retrouve cependant pas, pour l'instant, le résultat optimal de la conjecture de Kashiwara-Vergne qui doit être que cette fonction E vaut 1 pour toutes les algèbres de Lie vues comme des paires symétriques.

Rappelons que cette conjecture a été démontrée en toute généralité par Alekseev-Meinrenken [2] comme conséquence de [32]. En principe il devrait y avoir une autre déformation de notre fonction comme dans la preuve de la conjecture de Kashiwara-Vergne.

III– Dans le cas des paires symétriques de Takiff $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \otimes T$ avec \mathfrak{g} une paire symétrique et $T^2 = 0$, on a

$$E_{\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \otimes T}(X + X' \otimes T, Y + Y' \otimes T) = E_{\mathfrak{g}}^2(X, Y).$$

On sait toutefois que dans ce contexte, l'homomorphisme d'Harish-Chandra coïncide avec l'isomorphisme de Rouvière car on peut construire des polarisations σ -stable (cf. § 6.3). Ceci montre que la formule de Rouvière peut réaliser un isomorphisme d'algèbres sans que la fonction $E_{\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \otimes T}$ soit égale à 1. La question pertinente est donc de savoir si cette fonction est homotope à 1 modulo les champs $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}_T$ -adjoints.

4 Écriture des opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique en coordonnées exponentielles

On considère une paire symétrique (\mathfrak{g}, σ) . Dans le diagramme de Cattaneo-Felder pour la bi-quantification on considère le couple de variétés co-isotropes $C_2 = \mathfrak{k}^\perp$ mis en position verticale et $C_1 = 0^\perp = \mathfrak{g}^*$ mis en position horizontale (cf. § 1.6). Comme dans [19] on considère pour le 2-vecteurs de Poisson, la moitié du crochet de Lie.

4.1 Liens entre les produits de Rouvière et de Cattaneo-Felder

4.1.1 Produit de Duflo-Kontsevich

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est munie d'un bi-vecteur de Poisson égal à la moitié du crochet de Lie standard. Alors $(U(\mathfrak{g}), \cdot)$ est isomorphe à $(S(\mathfrak{g}), \star_{DK})$. Rappelons que le produit de Duflo-Kontsevich sur $S(\mathfrak{g})$ est donné par la formule

$$\beta\left(\partial_{q^{1/2}}(f \star_{DK} g)\right) = \beta(\partial_{q^{1/2}} f) \cdot \beta(\partial_{q^{1/2}} g),$$

avec

$$q(X) = \det_{\mathfrak{g}} \left(\frac{\sinh \frac{\text{ad} X}{2}}{\frac{\text{ad} X}{2}} \right).$$

4.1.2 Roues horizontales et verticales

L'espace de réduction pour la partie verticale est l'algèbre $S(\mathfrak{p})^\natural$ munie du produit \star_{CF} . L'espace de réduction pour la partie horizontale est l'algèbre $S(\mathfrak{g})$ munie le produit de Duflo.

Notons

$$1 \star_1 f = A(f),$$

alors A est un opérateur donné par diagrammes de Kontsevich à 4-couleurs. L'opérateur est compliqué et n'est pas à coefficients constants car les diagrammes avec arêtes doubles colorées par $++$ et $+-$ ne sont pas nuls a

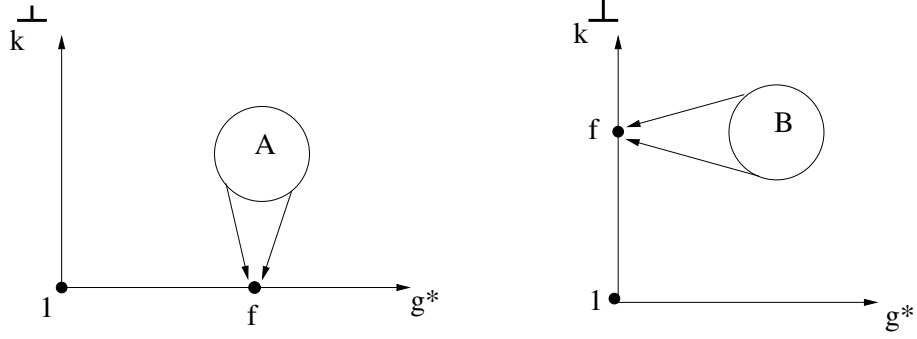


FIG. 29 – Contributions des roues pures sur les axes

priori.

Cet opérateur correspond à une modification de la projection de $S(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{p})$ via la symétrisation (modifiée), c'est à dire la décomposition $U(\mathfrak{g}) = \beta(\partial_{q^{1/2}} S(\mathfrak{p})) \oplus \mathfrak{k} \cdot U(\mathfrak{g})$. En effet lorsqu'on munit $S(\mathfrak{g})$ du produit de Duflo-Kontsevich on aura $S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{p}) \oplus \mathfrak{k} \star_{DK} S(\mathfrak{g})$ et donc grace à l'application $\beta \circ \partial_{q^{1/2}}$ on a :

$$U(\mathfrak{g}) = \beta \circ \partial_{q^{1/2}}(S(\mathfrak{p})) \oplus \mathfrak{k} \cdot U(\mathfrak{g}).$$

En particulier on a

$$1 \star_1 f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathfrak{k} \star_1 S(\mathfrak{g}).$$

Remarquons que pour $X \in \mathfrak{p}$ on a

$$q^{1/2}(X) = J\left(\frac{X}{2}\right),$$

avec $J(X) = \det_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\sinh(\text{ad} X)}{\text{ad} X} \right)$.

Lorsque f est dans $S(\mathfrak{p})$ alors l'opérateur A correspond aux contributions des roues pures ; c'est un opérateur à coefficients constant que l'on notera encore A . Il en est de même pour

$$f \star_2 1 = B(f).$$

On notera $A(X)$ et $B(X)$ ³⁰ les symboles associés. On a donc pour $X \in \mathfrak{p}$,

³⁰On verra dans § 6.3 prop. 23 que l'on a $B(X) = 1$ pour $X \in \mathfrak{p}$. Mais on n'utilise pas ici ce résultat.

$$A(X) = (1 \star_1 e^X) e^{-X} \quad \text{et} \quad B(X) = (e^X \star_2 1) e^{-X}.$$

Ce sont des symboles inversibles.

4.1.3 Comparaison des star-produits \sharp_{Rou} et \star_{CF}

Soient $f, g \in S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$. Par compatibilité des produits \star_1 et \star_2 on a $f \star_2 1 = 1 \star_1 A^{-1}B(f)$ et par suite

$$(f \star_{CF} g) \star_2 1 = 1 \star_1 A^{-1}B(f \star_{CF} g)$$

puis

$$(f \star_{CF} g) \star_2 1 = 1 \star_1 \left(A^{-1}B(f) \star_{DK} A^{-1}B(g) \right).$$

On en déduit que l'on a

$$A^{-1}B(f \star_{CF} g) = A^{-1}B(f) \star_{DK} A^{-1}B(g) \quad \text{modulo} \quad \mathfrak{k} \star_{DK} S(\mathfrak{g}). \quad (4.1)$$

Comme $\beta \circ \partial_{q^{1/2}}$ transforme le produit de Duflo en le produit dans l'algèbre enveloppante on en déduit que

$$\beta \circ \partial_{q^{1/2}} \circ A^{-1}B$$

transforme le produit \star_{CF} en le produit dans l'algèbre enveloppante modulo $\mathfrak{k} \cdot U(\mathfrak{g})$, c'est à dire que l'on a modulo $\mathfrak{k} \cdot U(\mathfrak{g})$:

$$\left(\beta \circ \partial_{q^{1/2}} \circ A^{-1}B \right) (f \star_{CF} g) = \left(\beta \circ \partial_{q^{1/2}} \circ A^{-1}B \right) (f) \left(\beta \circ \partial_{q^{1/2}} \circ A^{-1}B \right) (g)$$

Le produit de Rouvière [26] vérifie par définition avec $J(X) = \det \left(\frac{\sinh(\text{ad}X)}{\text{ad}X} \right)$

$$\beta \left(\partial_{J^{\frac{1}{2}}}(p \sharp_{Rou} q) \right) = \beta \left(\partial_{J^{\frac{1}{2}}}(p) \right) \cdot \beta \left(\partial_{J^{\frac{1}{2}}}(q) \right) \quad \text{modulo} \quad \mathfrak{k} \cdot U(\mathfrak{g})$$

En fait on va voir que les deux produits coïncident.

Théorème 4. *Les produits de Rouvière et de Cattaneo-Felder coïncident pour toute paire symétrique. On a pour $f, g \in S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$*

$$\beta\left(\partial_{J^{\frac{1}{2}}}(f \star_{CF} g)\right) = \beta\left(\partial_{J^{\frac{1}{2}}}(f)\right) \cdot \beta\left(\partial_{J^{\frac{1}{2}}}(g)\right) \quad \text{modulo } \mathfrak{k} \cdot U(\mathfrak{g}).$$

Preuve du théorème : La preuve se fait comme dans [19]. On compare deux isomorphismes. On démontre un lemme et une formule intermédiaire.

Lemme 13. *Il existe des algèbres de Lie résolubles pour lesquelles $\text{tr}_{\mathfrak{p}}(\text{ad}X)^{2n}$ n'agit pas comme une dérivation sur $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$.*

Preuve du lemme : Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie résoluble engendrée par t, x, y, z et les relations

$$[x, y] = z, \quad [t, x] = -x, \quad [t, y] = y.$$

C'est une paire symétrique pour les relations

$$\sigma(t) = -t, \quad \sigma(x) = y, \quad \sigma(z) = -z.$$

Le sous-espace \mathfrak{p} est engendré par $t, x - y, z$ et le sous-espace \mathfrak{k} est engendré par $x + y$. On vérifie facilement que l'on a $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}} = \mathbb{C}[z, 4zt + (x - y)^2]$. La forme t^* est clairement \mathfrak{k} -invariante car on a $t^*([\mathfrak{k}, \mathfrak{p}]) = 0$. Par ailleurs l'application polynomiale $X \mapsto \text{tr}_{\mathfrak{p}}(\text{ad}X)^{2n}$ s'identifie à $(t^*)^{2n}$ qui n'agit pas comme une dérivation dans $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$. ■

Proposition 13. *On a l'égalité de fonctions universelles suivante³¹ pour $X \in \mathfrak{p}$,*

$$A(X)J^{\frac{1}{2}}(X) = B(X)q^{\frac{1}{2}}(X).$$

Preuve de la proposition : Les fonctions A, B, q, J ne font intervenir que les $\text{tr}_{\mathfrak{p}}(\text{ad}X)^{2n}$ et sont universelles. Lorsque \mathfrak{g} est résoluble, on sait que l'on a les égalités $E = e = 1$ donc le produit de Rouvière et le produit \star_{CF} correspondent au produit standard. Raisonnons par l'absurde. On disposerait d'un automorphisme pour le produit standard dans $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ donné par l'exponentielle d'une série en $\text{tr}_{\mathfrak{p}}(\text{ad}X)^{2n}$. On en déduirait qu'il existerait $n > 0$ tel que $\text{tr}_{\mathfrak{p}}(\text{ad}X)^{2n}$ agit comme une dérivation sur $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ ce qui n'est pas vrai d'après le lemme ci-dessus. ■

³¹Compte tenu du fait que $B = 1$ comme on le verra dans § 6.3 prop. 23, cette proposition donne une formule pour $A(X)$ lorsque $X \in \mathfrak{p}$.

(fin de la preuve du théorème) Grace à la proposition 13 ci-dessus et à l'équation (4.1) le produit \star_{CF} et le produit de Rouvière coïncident. ■

Remarque : Pour $X \in \mathfrak{p}$ on a $q^{\frac{1}{2}}(X) = J(\frac{X}{2})$ et d'après la proposition 23 § 6.3 on a $B(X) = 1$. On en déduit la formule suivante pour $A(X)$

$$A^{-1}(X) = \frac{J^{\frac{1}{2}}(X)}{J(\frac{X}{2})}.$$

Remarque : Si on avait inversé le rôle de $C_1 = \mathfrak{g}^*$ et $C_2 = \mathfrak{k}^\perp$ on aurait trouvé de même

$$\beta\left(\partial_{J^{\frac{1}{2}}}(f \star_{CF} g)\right) = \beta\left(\partial_{J^{\frac{1}{2}}}(f)\right) \cdot \beta\left(\partial_{J^{\frac{1}{2}}}(g)\right) \quad \text{modulo } U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}.$$

4.2 Cas à paramètre

4.2.1 Commutativité d'algèbres d'opérateurs différentiels invariants sur les z -densités

On met en position verticale maintenant la sous-variété co-isotrope $\lambda + \mathfrak{k}^\perp$ avec λ un caractère de \mathfrak{k} et \mathfrak{g}^* en position horizontale. Notons \mathfrak{k}^λ le sous-espace affine $\{X + \lambda(X), \quad X \in \mathfrak{k}\}$. Comme précédemment on aura pour f, g deux éléments \mathfrak{k} -invariants

$$A^{-1}B(f \star_{CF, \lambda} g) = A^{-1}B(f) \star_{DK} A^{-1}B(g) \quad \text{modulo } \mathfrak{k}^{-\lambda} \star_{DK} S(\mathfrak{g})$$

car on a $1 \star_1 K = \lambda(K)$.

En faisant agir la symétrie par rapport à la diagonale cela revient à mettre en position horizontale la sous-variété $\lambda + \mathfrak{k}^\perp$ et en position verticale \mathfrak{g}^* .

Dans la première configuration ($\lambda + \mathfrak{k}^\perp$ en position horizontale) considérons deux fonctions f, g positionnées sur l'axe horizontal. En position limite on retrouve le produit de Dufo $f \star_{DK} g$. Par symétrie diagonale on trouvera dans la deuxième configuration ($\lambda + \mathfrak{k}^\perp$ en position verticale) en position limite

$$g \star_{DK, \text{signes}} f,$$

c'est à dire

$$f \star_{DK} g,$$

compte tenu des signes dus au changement d'orientation dans les sommets aériens et de la propriété de symétrie par rapport à l'axe vertical pour les coefficients de Kontsevich (avec une seule couleur) $(-1)^n w_\Gamma = w_{\hat{\Gamma}}$.

Du coté du produit de Cattaneo-Felder pour le paramètre λ on trouvera dans la première configuration $f \star_{CF,\lambda} g$ et par symétrie dans l'autre configuration on aura $g \star_{CF,-\lambda} f$.

On en déduit alors que l'on :

$$A^{-1}B(f \star_{CF,\lambda} g) = A^{-1}B(f) \star_{DK} A^{-1}B(g) \quad \text{modulo} \quad \mathfrak{k}^{-\lambda} \star_{DK} S(\mathfrak{g}) \quad (4.2)$$

$$A^{-1}B(g \star_{CF,-\lambda} f) = A^{-1}B(f) \star_{DK} A^{-1}B(g) \quad \text{modulo} \quad S(\mathfrak{g}) \star_{DK} \mathfrak{k}^{-\lambda}. \quad (4.3)$$

Or d'après le lemme 11 § 3.1 on a $f \star_{CF,\lambda} g = g \star_{CF,-\lambda} f$ et d'après un résultat de Duflo [13], résultant de la dualité de Poincaré, on a :

$$\mathfrak{k}^{-\lambda} \cdot U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}} = U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}} \cap U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\lambda + \text{tr}_{\mathfrak{k}}}.$$

On en déduit alors le résultat suivant qui étend le critère de commutativité des algèbres d'opérateurs différentiels sur les demi-densités³² et sur les fonctions³³ :

Théorème 5. *Pour f, g dans $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ et pour tout $z \in \mathbb{R}$ on a la relation*

$$f \star_{CF,\lambda} g = f \star_{CF,\lambda+z \text{tr}_{\mathfrak{k}}} g.$$

En particulier le produit naturel dans $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{z \text{tr}_{\mathfrak{k}}})^{\mathfrak{k}}$, l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur les z -densités, est commutatif pour tout z .

Preuve : Les fonctions $E_{\lambda+\text{tr}_{\mathfrak{k}}}$ et E_{λ} définissent les mêmes star-produits sur les éléments \mathfrak{k} -invariants d'après la relation de Duflo et les symétries trouvées. Il résulte par récurrence qu'il en est de même pour $E_{\lambda+n \text{tr}_{\mathfrak{k}}}$ et par prolongement des identités polynomiales pour $E_{\lambda+z \text{tr}_{\mathfrak{k}}}$. ■

³² cas $z = \frac{1}{2}$ cf. [13], on utilise la relation $\frac{1}{2} \text{tr}_{\mathfrak{k}} = -\frac{1}{2} \text{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}} + \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathfrak{g}}$ et le fait que l'action du caractère $\text{tr}_{\mathfrak{g}}$ n'est pas significative.

³³ cas $z = 0$, cf. [21].

4.2.2 Comparaison des fonctions $E(X, Y)$ et $e(X, Y)$

En appliquant à l'équation (4.3) l'opérateur $\beta(\partial_{q^{1/2}})$ qui transforme le produit \star_{DK} en le produit dans l'algèbre enveloppante on trouve, compte tenu de l'équation $A^{-1}Bq^{1/2} = J^{1/2}$,

$$\beta(\partial_{J^{1/2}}(f \star_{CF, \lambda} g)) = \beta(\partial_{J^{1/2}} f) \cdot \beta(\partial_{J^{1/2}} g) \quad \text{modulo} \quad U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}^{-\lambda}$$

Les fonctions $e_{-\lambda}(X, Y)$ vérifient le même type de relation. On en déduit que $E_{\lambda}(X, Y)$ et $e_{-\lambda}(X, Y)$ doivent définir le même star-produit.

Or d'après [30] les fonctions $e_{-\lambda}(X, Y)$ ne sont symétriques que pour $-\lambda = \frac{1}{2}\text{tr}_{\mathfrak{k}}$ et les premiers termes du développement calculé en § 3.5 laisse à penser que l'on a l'égalité conjecturale :

$$E_{\frac{1}{2}\text{tr}_{\mathfrak{k}}}(X, Y) \stackrel{??}{=} e(X, Y),$$

auquel cas on devrait avoir de manière conjecturale l'égalité :

$$E_{\lambda}(X, Y) \stackrel{??}{=} e_{-\lambda + \frac{1}{2}\text{tr}_k}(X, Y)$$

qui serait une sorte de moyenne des deux équations (4.2), (4.3).

Conjecture : On a $E_{\lambda}(X, Y) = e_{-\lambda + \frac{1}{2}\text{tr}_k}(X, Y)$.

4.3 Opérateurs différentiels invariants en coordonnées exponentielles

On considère le couple de variété co-isotropes $C_1 = \mathfrak{k}^{\perp}$ et $C_2 = 0^{\perp} = \mathfrak{g}^*$. L'algèbre de Lie est \mathfrak{g} munie de la moitié du crochet standard. Alors $(U(\mathfrak{g}), \cdot)$ est isomorphe à $(S(\mathfrak{g}), \star_{DK})$.

Les espaces de réduction sont pour la partie horizontale l'algèbre $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ munie du produit $\star_{CF} = \sharp_{Rou}$ et pour la partie verticale l'algèbre $S(\mathfrak{g})$ munie du produit de Kontsevich. L'espace de réduction à l'origine est $S(\mathfrak{p})$, c'est à dire les distributions portées par l'origine sur l'espace symétrique G/K .

On en déduit sur $S(\mathfrak{p})$ l'existence d'une action à gauche de $(S(\mathfrak{g}), \star_{Kont})$ et d'une action à droite de $(S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}, \star_{CF})$.

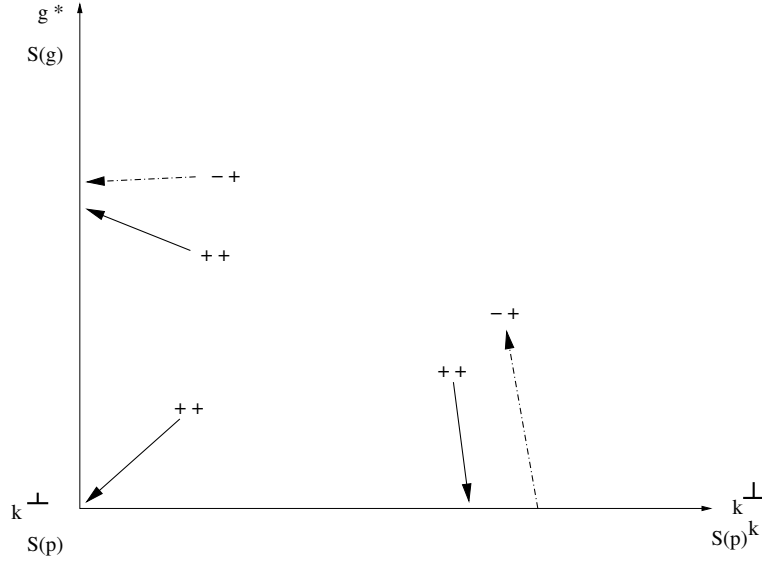


FIG. 30 – Fonctions d'angles pour les espaces symétriques

Soit $R \in S(\mathfrak{p})^\natural$. On place dans le cadran de Cattaneo-Felder, e^X à l'origine et R sur l'axe horizontal : on obtient donc $e^X \star_1 R$. C'est donc un élément de $S(\mathfrak{p})$ qui dépend de X , que l'on voit comme un opérateur différentiel sur \mathfrak{p} au point X ³⁴. On a le résultat suivant qui résout de manière satisfaisante un problème 7 de Duflo [11] :

Théorème 6. *La formule $e^X \star_1 R$ est l'écriture en coordonnées exponentielles du conjugué par l'application $J^{1/2}(X)$ de l'opérateur différentiel invariant sur l'espace symétrique G/K , donné par $D_{\beta(J^{1/2}(\partial)R)}$.*

Preuve : Soit $f \in C^\infty(G/K)$ et $R \in S(\mathfrak{p})^k$. On a

$$D_{\beta(R)} f(gK) = \langle R^{(Y)}, f(g \exp(Y)K) \rangle$$

où R est vu comme une distribution de support $Y = 0$. On note Exp la fonction $X \in \mathfrak{p} \mapsto \exp_G(X)K \in G/K$ avec $X \in \mathfrak{p}$. En écriture exponentielle on aurait pour la fonction

$$\phi(X) := f(\exp_G(X)K),$$

$$D_{\beta(R)}^{\text{Exp}} \phi(X) = D_{\beta(R)} f(\exp(X)K).$$

³⁴Le terme e^X est vu comme la distribution de Dirac au point X .

Rappelons que le produit de Kontsevich-Duflo est donné par la formule $\beta\left(\partial_{q^{1/2}}(a \star_{DK} b)\right) = \beta(\partial_{q^{1/2}}a) \cdot \beta(\partial_{q^{1/2}}b)$ avec $q(X) = \det_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\sinh \frac{\text{ad} X}{2}}{\frac{\text{ad} X}{2}}\right)$.

Si on tient compte du facteur $q^{1/2}$ entre $\mathcal{C}^\infty(G/K)$ et $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{p})$, on pose plutôt pour $X \in \mathfrak{p}$, $\phi(X) := q^{1/2}(X)f(\exp_G(X)K)$.

Il vient pour $u = \beta(\partial_{q^{1/2}}R)$ et D_u l'opérateur différentiel invariant à gauche sur l'espace symétrique associé à $u \in U(\mathfrak{g})$

$$D_u^{Exp}(\phi)(X) = q^{1/2}(X)D_u(f)(\exp_G(X)K) = \langle (\partial_{q^{1/2}}R)^{(Y)}, q^{1/2}(X) \left(\frac{\phi}{q^{1/2}} \right) (P(X, Y)) \rangle \quad (4.4)$$

où on a écrit $\exp_G(X)\exp_G(Y) = \exp_G(P(X, Y))\exp_G(K(X, Y))$ avec $P(X, Y) \in \mathfrak{p}$ et $K(X, Y) \in \mathfrak{k}$. Ces facteurs P, K dépendent de manière analytique de X, Y dans un voisinage de 0.

Pour X, Y dans \mathfrak{p} , on peut donc écrire

$$e^X \star_{DK} e^Y = \frac{D(X, Y)}{D(P, K)} e^P \star_{DK} e^K$$

avec $D(X, Y)$ la fonction de densité sur les algèbres de Lie (cf. § 3.7.1).

On a $e^K \star_2 1 = C(K)$ avec $C(K)$ les contributions des roues pures avec arêtes colorées par la couleurs $-+$ pour celles qui arrivent sur l'axe vertical. Comme $e^K \star_{DK} e^{-K} = q(K)$ on doit avoir $e^K \star_2 (e^{-K} \star_2 1) = C(K)C(-K) = q(K)$. On a $K(X, Y) = -K(Y, X)$ donc la partie symétrique de $C(K)$ vaut $q^{1/2}(K)$. En fait on la résultat intermédiaire suivant :

Lemme 14. *La fonction C est paire et vaut $q^{1/2}(K)$.*

Preuve du lemme : On a

$$\left(e^{K/2} \star_{DK} e^{K/2} \right) \star_2 1 = \frac{q(K/2)}{q^{1/2}(K)} e^K \star_2 1 = C(K) \frac{q(K/2)}{q^{1/2}(K)}.$$

Par ailleurs on a aussi

$$\left(e^{K/2} \star_{DK} e^{K/2} \right) \star_2 1 = e^{K/2} \star_2 \left(e^{K/2} \star_2 1 \right) = C(K/2)^2,$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{C(K/2)}{q^{1/2}(K/2)} \right)^2 = \frac{C(K)}{q^{1/2}(K)},$$

puis par récurrence

$$\left(\frac{C(\frac{K}{2^n})}{q^{1/2}(\frac{K}{2^n})} \right)^{2^n} = \frac{C(K)}{q^{1/2}(K)}.$$

Comme la fonction C et la fonction $q^{1/2}$ s'écrivent

$$\exp \left(\sum_{n \geq 2} w_n \text{tr}_{\mathfrak{p}}(\text{ad} K)^n + \sum_{n \geq 2} w'_n \text{tr}_{\mathfrak{k}}(\text{ad} K)^n \right)$$

on en déduit que l'on a

$$\frac{C(K)}{q^{1/2}(K)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{C(\frac{K}{2^n})}{q^{1/2}(\frac{K}{2^n})} \right)^{2^n} = 1.$$

■

(Fin de la preuve du théorème :) On note comme en §4.1.2, A l'opérateur vertical (correspondant à \mathfrak{g}^*) des contributions des roues pures et B l'opérateur horizontal³⁵. Grace au lemme ci-dessus on en déduit que l'on a

$$(e^X \star_{DK} e^Y) \star_2 1 = \frac{D(X,Y)}{D(P,K)} e^P \star_2 (e^K \star_2 1) = q^{1/2}(X) q^{1/2}(Y) \frac{A(P)}{q^{1/2}(P)} e^P.$$

D'après la proposition 13 on a pour $X \in \mathfrak{p}$:

$$A(X) J^{\frac{1}{2}}(X) = B(X) q^{\frac{1}{2}}(X),$$

d'où l'on tire l'égalité

$$(e^X \star_{DK} e^Y) \star_2 1 = q^{1/2}(X) q^{1/2}(Y) \frac{B(P)}{J^{1/2}(P)} e^P.$$

Par ailleurs le terme de gauche peut s'écrire, compte tenu de la compatibilité des produits :

$$A(Y) B^{-1}(Y) e^X \star_2 (1 \star_1 e^Y).$$

Il vient donc la formule

$$e^X \star_2 (1 \star_1 e^Y) = J^{1/2}(Y) q^{1/2}(X) \frac{B(P)}{J^{1/2}(P)} e^P.$$

³⁵En fait $B = 1$ d'après la proposition 23 § 6.3.

En différentiant par rapport à Y selon le polynôme R , on peut substituer e^Y par R . On peut alors utiliser l'invariance de R par rapport à \mathfrak{k} pour justifier de la compatibilité des produits \star_1 et \star_2 . Il vient alors

$$\begin{aligned} e^X \star_2 (1 \star_1 R) &= \partial_p^{(Y)} J^{1/2}(Y) q^{1/2}(X) \frac{B(P)}{J^{1/2}(P)} e^P \\ &= (e^X \star_2 1) \star_1 R = A(X) e^X \star_1 R. \end{aligned}$$

C'est à dire compte tenu de la relation $AJ^{\frac{1}{2}} = Bq^{\frac{1}{2}}$ on a :

$$e^X \star_1 p = R(\partial_Y) \frac{J^{1/2}(Y) J^{1/2}(X)}{B(X)} \frac{B(P)}{J^{1/2}(P)} e^P \big|_{Y=0}.$$

Cette formule est précisément l'écriture de l'opérateur $D_{\beta(J^{1/2}(\partial)R)}$ en coordonnées exponentielles sur l'espace symétriques G/K modifié par la fonction $J^{1/2}(X)/B(X)$. Compte tenu du résultat maintes fois annoncé $B = 1$ le théorème est démontré. ■

5 Homomorphisme d'Harish-Chandra en termes de diagrammes

On fixe une paire symétrique (\mathfrak{g}, σ) et une décomposition d'Iwasawa (voir § 2.4.1)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_o \oplus \mathfrak{n}_+.$$

5.1 Diagramme d'Harish-Chandra et espaces de réduction

On place dans le diagramme de Cattaneo-Felder pour la bi-quantification § 1.6, les sous-variétés co-isotropes \mathfrak{k}^\perp en position horizontale et $(\mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{n}_+)^\perp$ en position verticale. *On appellera cela le diagramme d'Harish-Chandra* (cf. Fig. 31).

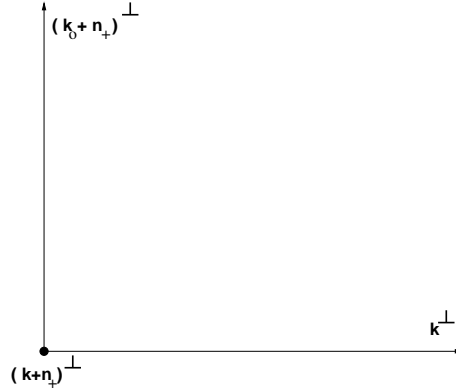


FIG. 31 – Bi-quantification définissant le diagramme d'Harish-Chandra

On a la décomposition et les couleurs suivantes

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_o}_{(-,+)} \oplus \underbrace{\mathfrak{k}_o}_{(-,-)} \oplus \underbrace{\mathfrak{p}_o}_{(+,+)} \oplus \underbrace{\mathfrak{n}_+}_{(+,-)}$$

où on a noté $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_o$ un supplémentaire de \mathfrak{k}_o dans \mathfrak{k} .

On fera attention que dans les diagrammes qui vont intervenir, il peut y avoir une arête double si celle-ci est colorée par deux couleurs différentes.

- (i) - L'algèbre de réduction qui est placée verticalement est tout simplement d'après la proposition 5 § 2.4.2

$$H_\epsilon^0((\mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{n}_+)^\perp) = \mathcal{C}_{poly}(\mathfrak{k}_o^\perp)^{\mathfrak{k}_o}[[\epsilon]] = S(\mathfrak{p}_o)^{\mathfrak{k}_o}[[\epsilon]].$$

- (ii) - L'algèbre de réduction placée à l'origine est aussi

$$S(\mathfrak{p}_o)^{\mathfrak{k}_o}[[\epsilon]].$$

- (iii)- L'algèbre de réduction qui est en position horizontale correspond à l'espace de réduction de

$$H^0_{\epsilon, (\mathfrak{p}_o \oplus \mathfrak{n}_+)}(\mathfrak{k}^\perp),$$

qui dépend du choix du supplémentaire de \mathfrak{k} , (ici $\mathfrak{p}_o \oplus \mathfrak{n}_+$) mais qui est isomorphe à l'espace de réduction standard $(S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}, \star_{CF})$ grace au § 1.5 théorème 1.

5.2 Espace de réduction vertical

Dans la partie verticale on trouve l'espace de réduction $S(\mathfrak{p}_o)^{\mathfrak{k}_o}$. Examinons le star-produit associé. Il est donné par une fonction de type $\widehat{E}(X, Y)$ correspondant aux graphes de types roues attachées à e^X, e^Y pour $X, Y \in \mathfrak{p}_o$.

Proposition 14. *On a $\widehat{E}(X, Y) = E_{\mathfrak{g}_o}(X, Y)$ avec $E_{\mathfrak{g}_o}(X, Y)$ la fonction pour la petite paire symétrique (\mathfrak{g}_o, σ) . Le produit dans la petite paire symétrique est donc le produit de Rouvière standard.*

Preuve : Dans les contributions qui interviennent, la roue est attachée à des éléments dans \mathfrak{g}_o . Les couleurs dans la roue sont alors simples :

- (i) soit la roue dérive dans les directions de \mathfrak{g}_o^* , et on retrouve la fonction $E_{\mathfrak{g}_o}$ pour la petite paire symétrique,
- (ii) soit la roue dérive dans les directions de \mathfrak{n}_+ avec couleur \dashrightarrow ,
- (iii) soit la roue dérive dans les directions de $\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{n}_+)$ avec couleur \longrightarrow .

On a donc des contributions du genre

$$\dashrightarrow_{\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_l} \text{tr}_{\mathfrak{n}_+} \left(\text{ad}(\Gamma_1) \circ \text{ad}\Gamma_2 \dots \circ \text{ad}(\Gamma_l) \right)$$

ou

$$\begin{aligned} \longrightarrow_{\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_l} \text{tr}_{\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{n}_+)} \left(\text{ad}(\Gamma_1) \circ \text{ad}\Gamma_2 \dots \circ \text{ad}(\Gamma_l) \right) = \\ \longrightarrow_{\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_l} \text{tr}_{\mathfrak{n}_-} \left(\text{ad}(\Gamma_1) \circ \text{ad}\Gamma_2 \dots \circ \text{ad}(\Gamma_l) \right) \quad (5.1) \end{aligned}$$

Remarquons alors que nous avons

$$\overrightarrow{\overrightarrow{w}}_{\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_l} = (-1)^{l-1} \overrightarrow{w}_{\Gamma_1\Gamma_l\ldots\Gamma_2}.$$

Notons $V(X, Y)$ toutes les contributions de type (ii) ou (iii). Ici il se passe un phénomène remarquable. Comme la roue est homogène pour ses couleurs, les dérivations se font soit toutes dans \mathfrak{n}_+ soit toutes dans $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_o$. L'argument de déformation à 4 points, montre qu'il n'y a pas de trace dans l'équation de déformation. Par conséquent on peut faire intervenir la compensation dans K_o . On obtient au final

$$V(X, Y)^2 D(X + Y) = D(a \cdot X) D(b \cdot Y),$$

avec $D(X) = V(X, -X)$, $a, b \in K_o$. Comme V est clairement invariante pour l'action de K_o on obtient la factorisation souhaitée. De plus D est symétrique et donc les roues qui interviennent sont de taille paire attachées directement à l'axe réel. Compte tenu de la relation déjà rencontrée

$$\overrightarrow{\overrightarrow{w}}_{\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_l} = (-1)^{l-1} \overrightarrow{w}_{\Gamma_1\Gamma_l\ldots\Gamma_2}$$

on en déduit que $D(X) = 1$. Comme le produit \star_{CF} coïncide avec le produit de Rouvière on en déduit la proposition. ■

Remarque : Pour les petites paires symétriques, d'après [35], le produit de Rouvière correspond au produit standard de l'algèbre symétrique via la symétrisation. C'est à dire que la fonction $E_{\mathfrak{g}_o}$ est sans effet sur les éléments \mathfrak{k}_o -invariants.

5.3 Espace de réduction horizontal

5.3.1 Equations de réduction

Les équations qui décrivent l'espace de réduction horizontal

$$H_{\epsilon, (\mathfrak{p}_o \oplus \mathfrak{n}_+)}^0(\mathfrak{k}^\perp)$$

sont données par des diagrammes colorés avec un seul point terrestre. Ce sont les diagrammes de la section 2.2.

Les équations portent un degré (le nombre de sommets aériens) et les termes de degré pair sont nuls d'après le lemme 7 § 2.2.

Si f est dans l'espace de réduction on pourra écrire

$$f = f_o + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \dots$$

avec

$$D_1(f_o) = 0, \quad D_1(f_1) + D_2(f_o) = 0, \quad \dots$$

L'opérateur D_1 correspond à l'action des champs \mathfrak{k} -adjoints, l'opérateur D_2 est nul pour des raisons de symétrie. L'opérateur D_3 contient un terme de type Bernoulli qui est non nul (cf. Fig. 32). Dans Fig. 33 on a représenté un exemple de graphe intervenant dans D_5 .

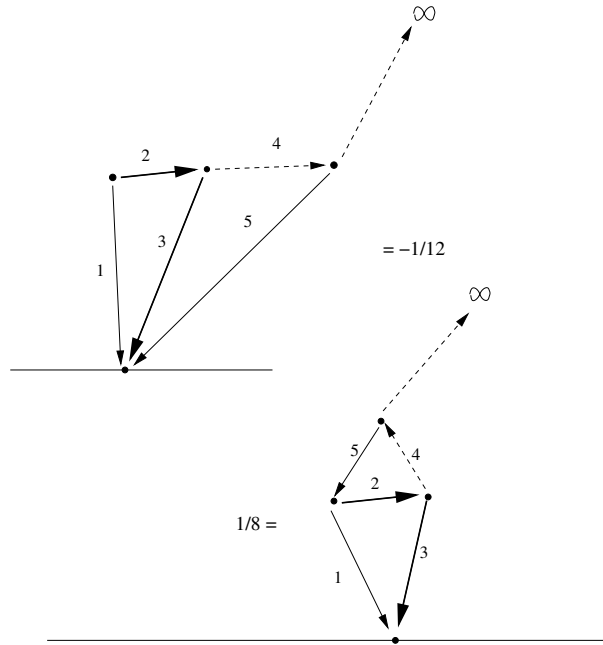


FIG. 32 – Graphe intervenant dans le calcul de la différentielle pour $n = 3$

Ce sont des équations compliquées. En effet les diagrammes qui apparaissent dans la détermination de l'espace de réduction sont de type Bernoulli ou de type roue avec une sortie vers un Bernoulli. Les arêtes sortantes sont dans \mathfrak{k}^* tandis que les arêtes qui arrivent sur l'axe réel sont colorés par \mathfrak{p}_o^* ou \mathfrak{n}_+^* . Les arêtes intermédiaires peuvent prendre toutes les couleurs, ce qui ne permet pas des simplifications dans le calcul des coefficients ou de l'opérateur.

Explications : L'espace de réduction pour ce choix de supplémentaire est heuristiquement l'écriture dans les coordonnées $(\mathfrak{n}_+, \mathfrak{p}_o)$ des éléments \mathfrak{k} -invariants de $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k}$ via la décomposition suivante

$$U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k} \simeq U(\mathfrak{n}_+) \otimes U(\mathfrak{g}_o)/U(\mathfrak{g}_o) \cdot \mathfrak{k}_o \simeq S(\mathfrak{n}_+) \otimes S(\mathfrak{p}_o)$$

où on a utilisé dans chaque facteurs la symétrisation. On conçoit que l'écriture des éléments \mathfrak{k} -invariant n'est pas simple.

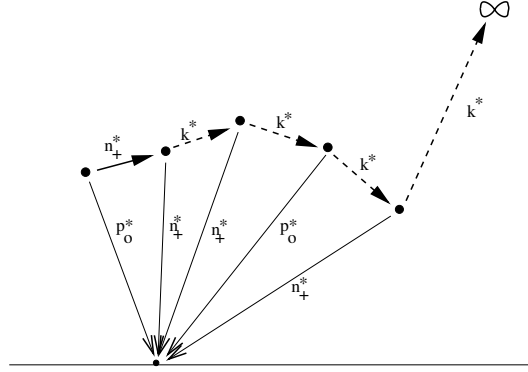


FIG. 33 – Exemple de graphe intervenant dans l'espace de réduction horizontal

5.3.2 Description du produit $\star_{\mathfrak{p}_o + \mathfrak{n}_+}$

Le produit est composé soit de diagrammes de type Lie, soit de roues.

i- Les diagrammes de types Lie ont forcément une racine dans \mathfrak{n}_+ . En effet comme les couleurs sur l'axe réels sont dans \mathfrak{p}_o ou \mathfrak{n}_+ les racines sont dans \mathfrak{g}_o ou \mathfrak{n}_+ . Si la racine est dans \mathfrak{g}_o , alors le coefficient est nul comme dans le cas des paires symétriques ;

ii- Les diagrammes de type roue se décomposent en deux sous-ensembles. Le raisonnement fait pour la description de l'espace de réduction verticale peut se recopier. On retrouve les contributions pour le petit espace symétrique et les roues colorées de manière uniforme par \mathfrak{n}_+^* ($= \rightarrow$) ou par $\mathfrak{k}^*/\mathfrak{k}_o^*$ ($= --\rightarrow$). Pour calculer ces dernières contributions il suffit de placer des points génériques e^X et e^Y sur l'axe réel avec $X, Y \in \mathfrak{p}_o$. L'argument à quatre point montre encore que l'on dispose d'une équation d'évolution sans trace, ce qui permet de compenser l'évolution par un élément de K_o . Pour les raisons des symétries on va trouver que ces contributions valent 1.

5.4 Entrelacement et projection

Rappelons la décomposition et les couleurs dans le diagramme de Cattaneo-Felder associé à la décomposition d'Iwasawa :

$$\mathfrak{g} = \underset{(-,+)}{\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_o} \oplus \underset{(-,-)}{\mathfrak{k}_o} \oplus \underset{(+,+)}{\mathfrak{p}_o} \oplus \underset{(+,-)}{\mathfrak{n}_+} .$$

On définit l'opérateur de transmutation dans le diagramme $(\mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{n}_+)^{\perp}$ et \mathfrak{k}^{\perp} , c'est à dire que l'on va utiliser la structure de bi-module de $S(\mathfrak{p}_o)^{\mathfrak{k}_o}$ pour transmuter les éléments d'un coté vers l'autre. Pour $f \in S(\mathfrak{k}^{\perp})_{\epsilon, \mathfrak{p}_o + \mathfrak{n}_+}$ on va écrire

$$\Gamma_{HC}(f) \star_2 1 = 1 \star_1 f,$$

avec $\Gamma(f) \in S(\mathfrak{p}_o)^{\mathfrak{k}_o}$. L'opérateur Γ_{HC} sera appelé opérateur de transmutation.

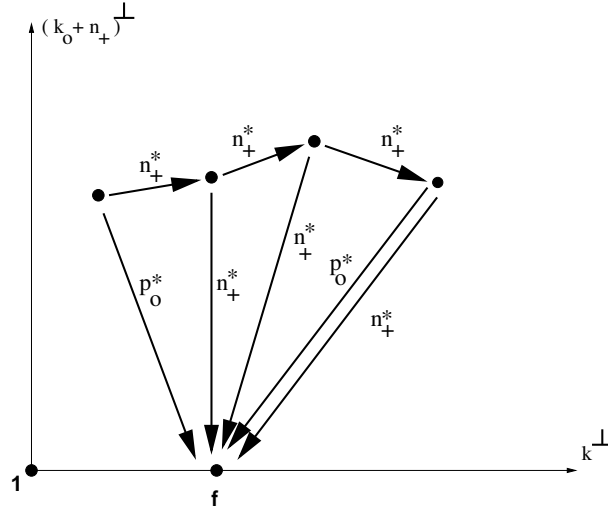


FIG. 34 – Exemple de graphe intervenant l'opérateur de transmutation horizontal

Lemme 15. *Les opérateurs qui interviennent dans la transmutation pour le diagramme d'Harish-Chandra sont des roues (a priori tentaculaires).*

Preuve : Pour la partie horizontale, les dérivées se font dans les directions \mathfrak{p}_o^* ou \mathfrak{n}_+^* . Donc pour les diagrammes de type Lie, la racine est dans \mathfrak{n}_+ , ce

qui va donner 0 pour l'opérateur quand on va le restreindre à $(\mathfrak{k}_o \oplus \mathfrak{n}_+)^{\perp} \cap \mathfrak{k}^{\perp}$. Donc toutes les arêtes qui arrivent sur l'axe réel sont dans \mathfrak{p}_o^* . Mais alors il y a une arête double de même couleur et le coefficient est nul.

Pour la partie verticale c'est plus simple. Comme l'espace de réduction est $S(\mathfrak{p}_o)^{\mathfrak{k}_o}$, seules les arêtes dans \mathfrak{p}_o^* peuvent dériver. On a donc une arête double dans les graphes de type Bernoulli. ■

Notons ici A_{HC} les contributions des roues horizontale et B_{HC} les contribution des roues verticales.

Lemme 16. *La roue A_{HC} n'a que des arêtes sortantes dans \mathfrak{p}_o^* . Il est de même pour la roue B_{HC} . Les symboles correspondants sont donc des fonctions type exponentielle sur \mathfrak{p}_o . Les roues sont pures.*

Preuve : Supposons qu'il y ait une sortie dans \mathfrak{n}_+^* au sommet n . En regardant la couleur de l'autre arête issue de n , alors on se convainc que les couleurs dans la roue sont

-(i) soit toutes dans \mathfrak{n}_+^* ,

-(ii) soit toutes dans un supplémentaire de $\mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{n}_+$ pris dans \mathfrak{k} .

Alors les contributions donnent selon les cas :

$$(i) \quad \text{tr}_{\mathfrak{n}_+}(\text{ad}P_1 \cdots \text{ad}N_1 \cdots) = 0$$

ou

$$(ii) \quad \text{tr}_{\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{n}_+)}(\text{ad}P_1 \cdots \text{ad}N_1 \cdots) = 0.$$

On conclut que toutes les sorties pour la roue A_{HC} sont dans \mathfrak{p}_o^* et par conséquent les arêtes finales sont colorées par \mathfrak{p}_o^* ; forcément les roues sont pures. C'est bien-sûr encore le cas pour la roue B_{HC} car l'espace de réduction est $S(\mathfrak{p}_o)^{\mathfrak{k}}$. ■

Examinons la symétrie par rapport à la bissectrice principale, notée

$$s(z) = i\bar{z}.$$

On a les relations suivantes sur les fonctions d'angles

$$d\phi_{++}(p, q) = d\phi_{--}(q, p) \quad (5.2)$$

$$d\phi_{++}(s(p), s(q)) = -d\phi_{++}(p, q) \quad (5.3)$$

$$d\phi_{+-}(s(p), s(q)) = -d\phi_{+-}(p, q) \quad (5.4)$$

$$d\phi_{-+}(s(p), s(q)) = -d\phi_{-+}(p, q) \quad (5.5)$$

Proposition 15. *On a la relation suivante $B_{HC}^{-1}A_{HC} = 1$. L'opérateur de transmutation correspond simplement à la restriction à $(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}_+)^{\perp}$.*

Preuve : Les roues qui sont colorées par \mathfrak{p}_o^* et \mathfrak{k}_o^* , c'est à dire $(+, +)$ ou $(-, -)$, vérifient la même propriété que celle que nous avons déjà rencontrées à la proposition 7 § 3.2. Il y a un nombre pair de sorties, avec alternance des couleurs $(+, +)$ et $(-, -)$, donc comme dans la proposition 7 ces contributions s'annulent aussi bien dans A_{HC} que dans B_{HC} .

Il reste à considérer les roues uniformes en $(+, -)$ (dérivée en \mathfrak{n}_+^*) ou uniformes en $(-, +)$ (dérivée en $\mathfrak{k}_o^*/\mathfrak{k}_o^*$).

Notons $w_{\Gamma_{+-}}^A$ le coefficient associé à la roue pure de taille n attachée sur l'axe horizontal et de couleur $(+, -)$ et on introduit de même $w_{\Gamma_{-+}}^A$, $w_{\Gamma_{+-}}^B$ et $w_{\Gamma_{-+}}^B$.

Compte tenu des symétries (5.2) par rapport à la bissectrice principale on a :

$$w_{\Gamma_{+-}}^B = (-1)^n w_{\Gamma_{-+}}^A \quad w_{\Gamma_{-+}}^B = (-1)^n w_{\Gamma_{+-}}^A.$$

Par ailleurs du côté de l'opérateur la dérivation ne se faisant qu'en la direction de \mathfrak{p}_o^* , le symbole correspondant peut s'écrire pour $X \in \mathfrak{p}_o$:

$$\Gamma_{(+,-)}(X) = \text{tr}_{\mathfrak{n}_+}(\text{ad}X)^n$$

$$\Gamma_{(-,+)}(X) = \text{tr}_{\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_o \oplus \mathfrak{n}_+)}(\text{ad}X)^n = \text{tr}_{\mathfrak{n}_-}(\text{ad}X)^n = (-1)^n \text{tr}_{\mathfrak{n}_+}(\text{ad}X)^n.$$

En effet on a $\text{tr}_{\mathfrak{n}_+} \text{ad}X = -\text{tr}_{\mathfrak{n}_-} \text{ad}X$ pour $X \in \mathfrak{p}_o$. Au total il y a compensation et on a les relations suivantes :

$$w_{\Gamma_{+-}}^B \text{tr}_{\mathfrak{n}_+}(\text{ad}X)^n = w_{\Gamma_{-+}}^A \text{tr}_{\mathfrak{n}_-}(\text{ad}X)^n = w_{\Gamma_{-+}}^A \Gamma_{(+,-)}^A(X)$$

et

$$w_{\Gamma_{-+}}^B \Gamma_{(-,+)}(X) = w_{\Gamma_{+-}}^A \Gamma_{(+,-)}^A(X).$$

Ceci montre que l'on a $A_{HC} = B_{HC}$. Comme on a $\Gamma_{HC}(f) = B_{HC}^{-1}A_{HC}(f)$ on en déduit que $\Gamma_{HC}(f)$ est bien la restriction de f à $(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}_+)^{\perp}$. ■

Définition 5. *En théorie de Lie pour les paires symétriques, on appelle projection d'Harish-Chandra pour la décomposition*

$$U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k} \simeq U(\mathfrak{n}_+) \otimes U(\mathfrak{g}_o)/U(\mathfrak{g}_o) \cdot \mathfrak{k}_o$$

le facteur dans $U(\mathfrak{g}_o)/U(\mathfrak{g}_o) \cdot \mathfrak{k}_o$. C'est un homomorphisme d'algèbres pour les invariants de

$$(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k})^{\mathfrak{k}} \quad \text{sur} \quad (U(\mathfrak{g}_o)/U(\mathfrak{g}_o) \cdot \mathfrak{k}_o)^{\mathfrak{k}_o}.$$

On peut maintenant énoncer un résultat similaire en terme de diagrammes de Kontsevich :

Proposition 16. *La projection d'Harish-Chandra correspond à l'opérateur de transmutation c'est à dire la restriction à $\mathfrak{p}_o^* = (\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}_+)^{\perp}$. Elle prend ses valeurs dans $S(\mathfrak{p}_o)^{\mathfrak{k}_o}$. C'est un homomorphisme d'algèbres de*

$$\left(H_{\epsilon, (\mathfrak{p}_o \oplus \mathfrak{n}_+)}^0(\mathfrak{k}^{\perp}), \star_{(\mathfrak{p}_o \oplus \mathfrak{n}_+)} \right) \quad \text{sur} \quad \left(S(\mathfrak{p}_o)^{\mathfrak{k}_o}, \star_{\text{Rouv}=CF} \right).$$

Preuve : Le fait que la restriction à \mathfrak{p}_o^* est une fonction \mathfrak{k}_o -invariante est clair, car toutes les opérations que nous avons effectuées peuvent être choisies \mathfrak{k}_o -équivariante. En effet le choix du supplémentaire $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_o$ peut être facilement choisi \mathfrak{k}_o -invariant, il suffit de prendre $(\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_+) \cap \mathfrak{k}$. Les équations sont clairement indépendantes des choix de la bases (une fois choisies les décompositions), car cela correspond à des transformations linéaires qui préservent les couleurs des diagrammes. Maintenant \mathfrak{k}_o préserve la décomposition. Donc l'espace de réduction est K_o -invariant. ■

Commentaire : Il est bien connu que l'homomorphisme d'Harish-Chandra est quelque chose de très compliqué. Ici il correspond à une simple restriction. Il faut comprendre que la difficulté est cachée dans la description de l'algèbre de réduction. En quelque sorte il faut maintenant écrire un isomorphisme explicite entre $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ et $H_{\epsilon, (\mathfrak{p}_o \oplus \mathfrak{n}_+)}^0(\mathfrak{k}^{\perp})$, pour décrypter toute la difficulté de l'homomorphisme d'Harish-Chandra. C'est l'objet de la section suivante.

5.5 L'homomorphisme d'Harish-Chandra en termes de graphes

Le théorème 1 § 1.5.3 montre qu'il existe un isomorphisme entre les deux espaces de réduction correspondants aux décomposition de Cartan et d'Iwasawa. On disposera alors d'une formule pour l'homomorphisme d'Harish-Chandra en termes de diagrammes.

En effet les cohomologies sont isomorphes quand on prend deux supplémentaires de \mathfrak{k}^\perp : ici on prend \mathfrak{p}^\perp et $(\mathfrak{k}_o + \mathfrak{n}_+)^\perp$. Donc il existe un isomorphisme de $(S(\mathfrak{p}))_{CF}^{\mathfrak{k}, \star}$ dans $(S(\mathfrak{p}_o))_{CF}^{\mathfrak{k}_o, \star}$: c'est l'homomorphisme d'Harish-Chandra.

5.5.1 Calcul de l'élément de gauge

On reprend ici les notations de § 1.5.3. Le champ v s'écrit $v = -V_a \partial_{P_a^*}$ avec $(P_a^*)_a$ base de $\mathfrak{k}^\perp = \mathfrak{p}^*$ et $V_a \in \mathfrak{k}$.

L'opérateur qui réalise l'entrelacement est calculé de manière récursive.

Plus précisément on doit intégrer la composante de degré (total) 0 du champ $[DU_{\pi_t}(v), \bullet]_{GH}$. C'est en effet cet élément qui conjugue les différentielles et réalise l'isomorphisme en cohomologie pour les star-produits comme on l'a vu au théorème 1.

Lemme 17. *L'élément du groupe de gauge qui entrelace les star-produits pour deux choix de supplémentaires, vivra dans le groupe associé à l'algèbre de Lie engendrée par les coefficients de Taylor du champ $[(DU_{\widehat{\pi}_t}(\widehat{v}))_0, \bullet]_{GH}$.*

Preuve : L'équation suivante sur les composantes de degré 0 (dans le complexe de Hochschild) contrôle la déformation des stars-produits :

$$\frac{\partial(\mu_t)_0}{\partial t} = [(DU_{\widehat{\pi}_t}(\widehat{v}))_0, (\mu_t)_0].$$

Pour simplifier, notons $A(t) = [DU_{\widehat{\pi}_t}(\widehat{v})_0, \bullet]$ l'opérateur linéaire d'ordre 0 (total et de Hochschild) et $y(t) = (\mu_t)_0$.

On doit donc résoudre une équation différentielle linéaire de la forme $y'(t) = A(t)y(t)$. On a, comme série formelle en t :

$$y(t) = y(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} y_n$$

L'équation différentielle donne $y_1 = A(0)y_0$. Posons $y^{(1)}(t) = e^{-tA(t)}y(t)$.

Alors $y^{(1)}(t) = y_0 \pmod{t^2}$ et vérifie l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y^{(1)}(t) &= e^{-tA(t)} A(t) e^{tA(t)} y^{(1)}(t) + \left(\frac{de^{-tA(t)}}{dt} e^{tA(t)} \right) y^{(1)}(t) = \\ &= A(t)y^{(1)}(t) + \left(\frac{e^{-\text{ad}(tA(t))} - 1}{-\text{ad}(tA(t))} \frac{d(-tA(t))}{dt} \right) y^{(1)}(t) = \\ &= t \left(\frac{e^{-\text{ad}(tA(t))} - 1}{\text{ad}(tA(t))} A'(t) \right) y^{(1)}(t). \quad (5.6) \end{aligned}$$

On pose

$$A_1(t) = \left(\frac{e^{-\text{ad}(tA(t))} - 1}{\text{ad}(tA(t))} A'(t) \right),$$

qui est bien dans l'algèbre de Lie engendrée par les coefficients de Taylor de $A(t)$. Il vient l'équation différentielle

$$\frac{dy^{(1)}(t)}{dt} = tA_1(t)y^{(1)}(t).$$

On pose ensuite

$$y^{(2)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}A_1(t)} y^{(1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}A_1(t)} e^{-tA(t)} y(t).$$

Alors on a $y^{(2)}(t) = y_0 \pmod{t^3}$ et on a, via la formule de Campbell-Hausdorff,

$$y^{(2)}(t) = e^{\left(-\frac{t^2}{2}A_1(t) - tA(t) + \frac{1}{2}[\frac{t^2}{2}A_1(t), tA(t)] \dots\right)} y(t).$$

De plus $y^{(2)}(t)$ vérifie l'équation

$$\frac{dy^{(2)}(t)}{dt} = \frac{t^2}{2}A_2(t)y^{(2)}(t),$$

avec

$$A_2(t) = \left(\frac{e^{-\text{ad}(\frac{t^2}{2}A_1(t))} - 1}{\text{ad}(\frac{t^2}{2}A_1(t))} A_1'(t) \right).$$

On peut donc faire une récurrence. On trouve que $y(t)$ est l'image (comme série formelle en t) de $y(0)$ par l'action d'un élément du groupe formel associé à l'algèbre de Lie des coefficients de Taylor de $A(t)$. On a de plus comme série formelle en t

$$y(t) = e^{\Omega(t)} y(0) = e^{tA(t)} e^{\frac{t^2}{2}A_2(t)} \dots y(0).$$

La résolution sous cette forme est connue en analyse numérique [16] et se trouve explicitement dans [22]³⁶.

On peut d'ailleurs en utilisant des graphes binaires écrire explicitement l'élément du groupe de gauge (voir [15] pour une description précise des graphes et des coefficients) qui fait intervenir des crochets itérés de A et de ses primitives. On trouve par exemple :

$$\begin{aligned}\Omega(t) = & \int_0^t A(t)dt - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{t_1} [A(t_2), A(t_1)] dt_2 dt_1 + \\ & \frac{1}{12} \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} [A(t_3), [A(t_2), A(t_1)]] dt_3 dt_2 dt_1 + \\ & + \frac{1}{4} \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} [[A(t_3), A(t_2)], A(t_1)] dt_3 dt_2 dt_1 \dots \quad (5.7)\end{aligned}$$

■

Les expressions de ce type sont connues sous le vocable de série de Magnus [22]³⁷. Elles s'obtiennent facilement en résolvant l'équation

$$\Omega'(t) = \frac{\text{ad}\Omega(t)}{e^{\text{ad}\Omega(t)} - 1} A(t),$$

par la méthode de Picard en posant $\Omega_0(t) = 0$ et

$$\Omega_{n+1}(t) = \int_0^t \frac{\text{ad}\Omega_n(s)}{e^{\text{ad}\Omega_n(s)} - 1} A(s) ds,$$

ce qui fait apparaître les itérations.

5.5.2 Etude de l'opérateur l'opérateur $(DU_\pi(v))_0$

On a $\pi_{t=0} = \pi$. On montre maintenant que pour $t = 0$, l'opérateur $DU_{\pi_t}(v)_0$ est nul dans le cas des paires symétriques.

Lemme 18. *Les graphes qui interviennent dans la composante de Hochschild de degré 0 de $DU_\pi(v)$ que l'on note $(DU_\pi(v))_0$ sont de trois types : des graphes de type Bernoulli fermés par v (cf. Fig. 36) ou des graphes de type roue attachée à un Bernoulli lequel s'attache à v (cf. Fig. 37) ou des graphes de type roue pure attachée à v (cf. Fig. 38). L'opérateur $DU_\pi(v)_0$ est donc à coefficients constants. Pour des raisons de symétrie, il est nul. Par contre le terme $(DU_\pi(v))_1$ n'est pas nul.*

³⁶La référence cite Zassenhaus pour ce résultat.

³⁷Référence que nous a indiquée D. Manchon.

Preuve : Il suffit de regarder ce qui se passe lorsqu'on applique l'opérateur sur des fonctions, car les dérivées sortant de l'axe réel n'interviennent pas, sinon il sortirait une arête d'un sommet aérien ce qui est exclu (on aura alors $n \geq 2$).

L'opérateur n'agit donc que sur les coefficients de la fonction f placée au point terrestre. Le sommet où on a placé le champ de vecteurs v doit être dérivé dans la direction de \mathfrak{k}^* (car les coefficients du champ v sont dans \mathfrak{k}). Cette arête provient :

- soit d'un diagramme de type Bernoulli lui même attaché ou non à une roue,
- soit d'une roue pure.
- Dans le premier cas, l'arête issue de v peut soit dériver la racine du graphe de Bernoulli³⁸(cf. Fig. 36), soit dériver le sommet terrestre si le graphe de Bernoulli est attaché à une roue (cf. Fig. 37).
- Dans le second cas, l'arête issue de v doit dériver le sommet sur l'axe réel (cf. Fig. 38).

Il est facile de se convaincre en examinant tous les cas qu'il y a forcément un nombre n impair de sommets attachés au bi-vecteur π . Par conséquent, la symétrie par rapport à l'axe vertical fait apparaître un signe $(-1)^n$ dans son coefficient, ce qui montre les coefficients de ces graphes sont nuls et donc on a $(DU_\pi(v))_0 = 0$.

Le terme de degré 1 (pour le complexe de Hochschild) de l'opérateur $DU_\pi(v) = 0$ n'est pas nul car le graphe Fig. 35 intervient de manière non triviale (le coefficient vaut $\frac{1}{2}$). ■

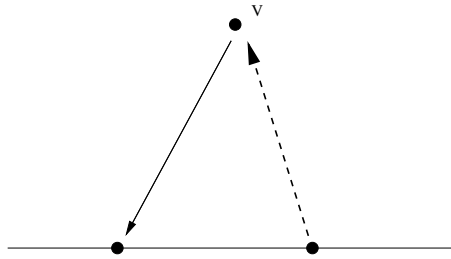


FIG. 35 – Exemple de graphe intervenant l'opérateur de $(DU_\pi(v))_1$

³⁸Ce sommet doit être dérivé car il est dans k

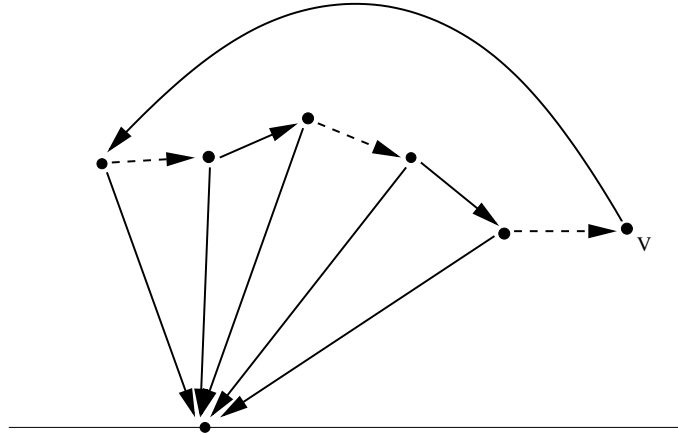


FIG. 36 – Exemple de graphe intervenant l'opérateur de D_1 : Bernoulli fermé par v

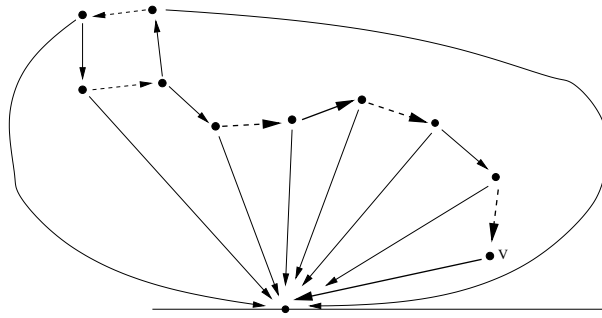


FIG. 37 – Exemple de graphe intervenant l'opérateur de D_1 : roue attachée à un Bernoulli attaché à v

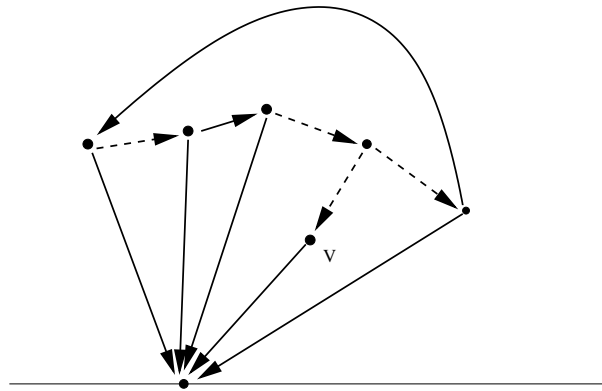


FIG. 38 – Exemple de graphe intervenant l'opérateur de D_1 : roue pure attachée à v

5.5.3 Coefficients de Taylor et invariance par le groupe de Weyl généralisé

La description diagrammatique de l'homomorphisme d'Harish-Chandra ne fait pas intervenir explicitement le groupe de Weyl généralisé.

Il faut montrer que nos constructions sont indépendantes du choix de \mathfrak{n}_+ (choix d'un système de racines positives) et cela revient essentiellement à montrer que ces constructions sont invariantes lorsqu'on change v en $-v$ (voir [34]).

Proposition 17. *Les coefficients de Taylor du champ $(DU_{\pi_t}(v))_0$ sont invariants par le changement de champ $v \mapsto -v$. L'homomorphisme d'Harish-Chandra ne dépend donc pas du choix de la chambre de Weyl.*

Preuve : On fait un inventaire des diagrammes pour les coefficients de Taylor et on calcule le nombre de fois que v apparaît.

D'après les formules de § 1.5.1 les bi-vecteurs π et $[v, [v, \pi]]$ se comportent de la même manière vis à vis des couleurs tandis que le bi-vecteur $[v, \pi]$ se comporte de manière opposée.

Les diagrammes qui apparaissent dans le calcul des coefficients de Taylor de $(DU_{\pi_t}(v))_0$ sont les diagrammes décrits dans le lemme 18 auquel il faut ajouter le diagramme de type Bernoulli non fermé (l'arête issue de v dérive le sommet terrestre et la racine du Bernoulli est dans \mathfrak{p}) comme dans la Fig. 39. Les sommets en dehors de v sont attachés aux bi-vecteurs $\pi, [v, \pi]$ ou $[v, [v, \pi]]$.

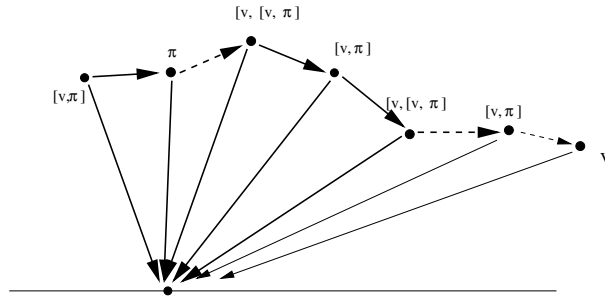


FIG. 39 – Graphe de type Bernoulli non fermé

Chaque sommet attaché à π ou $[v, [v, \pi]]$ (on note p leur nombre) engendre un changement de couleur dans la roue ou le brin de Bernoulli, tandis que les sommets attachés à $[v, \pi]$ (on note q leur nombre) ne change pas la couleur. On doit avoir $p + q + 1$ impair pour que le coefficient ne soit pas

nul. Le nombre de fois que v apparaît est congru à $q + 1$.

i- Examinons le cas des graphes de type Bernoulli (fermé ou non) :

Le nombre p doit être impair. En effet si le graphe est de type Bernoulli fermé alors l'arête issue de v dérive la racine dans la couleur \mathfrak{p}^* . Si le graphe est de type Bernoulli non fermé les arêtes issues de la racine sont colorées par \mathfrak{p}^* . Dans tous les cas $q + 1$ est pair. Le nombre de fois que v apparaît est donc pair.

ii- Examinons le cas des graphes roues attachées à un Bernoulli :

On note p_1 (resp. q_1) le nombre de sommets, dans la roue, attachés à π ou $[v, [v, \pi]]$ (resp. $[v, \pi]$). On note p_2 (resp. q_2) le nombre de sommets, dans brin de Bernoulli, attachés à π ou $[v, [v, \pi]]$ (resp. $[v, \pi]$). Le nombre de changements de couleur dans la roue est pair. On en déduit facilement que $p_1 + p_2$ est impair. Donc $q_1 + q_2 + 1$ est pair. ■

Rappelons que pour les paires symétriques, la décomposition d'Iwasawa généralisée provient de l'action d'un tore \mathfrak{s}_f généralisant les sous-espaces de Cartan, c'est le sous-espace de Cartan-Duflo (voir § 2.4). Le groupe fini qui remplace le groupe de Weyl est le groupe quotient $N_K(\mathfrak{s}_f)/Z_K(\mathfrak{s}_f)$ du normalisateur sur le centralisateur. Remplacer v par $-v$ revient dans notre situation à remplacer \mathfrak{n}_+ par \mathfrak{n}_- . On en déduit en faisant intervenir des projections d'Harish-Chandra partielles que notre construction est indépendante du choix du système de racines positives.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 18. *L'homomorphisme d'Harish-Chandra est indépendant du choix du \mathfrak{n}_+ . Il est invariant par le groupe de Weyl généralisé.*

6 Construction de caractères

On considère (\mathfrak{g}, σ) une paire symétrique et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ sa décomposition de Cartan.

Dans cette section on construit de manière systématique des caractères pour l'algèbre des opérateurs différentiels invariants en utilisant la bi-quantification (cf. §1.6) et des polarisations. Plus précisément on applique le principe de bi-quantification aux sous-variétés co-isotropes $f + \mathfrak{b}^\perp$ et \mathfrak{k}^\perp avec $f \in \mathfrak{k}^\perp$ et \mathfrak{b} une polarisation en f . On renvoie au § 2.5 pour la notion de polarisation.

6.1 Construction des caractères pour des algèbres d'opérateurs différentiels invariants

Principe de construction : On applique le principe de bi-quantification aux sous-variétés co-isotropes $f + \mathfrak{b}^\perp$ et \mathfrak{k}^\perp avec $f \in \mathfrak{k}^\perp$ et \mathfrak{b} une polarisation en f et on utilise la transmutation. D'après la proposition 6 § 2.5 le diagramme de bi-quantification fournit un caractère pour l'algèbre de réduction $(H_{\epsilon, \mathfrak{b}}^0(\mathfrak{k}^\perp), \star_{CF})$.

En effet pour $P \in H_{\epsilon, \mathfrak{b}}^0(\mathfrak{k}^\perp)$ on calcule alors $1 \star_1 P$.

C'est une fonction polynomiale $K \cap B$ -invariante sur $f + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b})^\perp$, avec K et B des groupes connexes d'algèbres de Lie \mathfrak{k} et \mathfrak{b} . Or $(K \cap B) \cdot f$ est ouvert dans $f + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b})^\perp$, donc cette fonction polynomiale est constante. L'application $P \mapsto 1 \star_1 P \in \mathbb{R}$ est donc un caractère de l'algèbre associative $H_{\epsilon, \mathfrak{b}}^0(\mathfrak{k}^\perp)$.

Cette algèbre de réduction dépend d'un choix de supplémentaire de \mathfrak{k} dans \mathfrak{g} , construit de manière compatible avec \mathfrak{b} . C'est à dire on doit choisir un supplémentaire de $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{k}$ dans \mathfrak{b} (que l'on pourrait noté abusivement $\mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{k})$), puis un supplémentaire de $\mathfrak{k} + \mathfrak{b}$ dans \mathfrak{g} (que l'on pourrait noté $\mathfrak{g}/(\mathfrak{k} + \mathfrak{b})$).

Proposition 19. *Le diagramme de Cattaneo-Felder appliqué au cas $f + \mathfrak{b}^\perp$ et \mathfrak{k}^\perp avec $f \in \mathfrak{k}^\perp$ et \mathfrak{b} une polarisation en f , fournit un caractère de l'algèbre de réduction $H_{\epsilon, \mathfrak{b}}^0(\mathfrak{k}^\perp)$.*

Grace au théorème 1 § 1.5.3, il existe un isomorphisme d'algèbres entre $H_\epsilon^0(\mathfrak{k}^\perp)$ et $H_{\epsilon, \mathfrak{b}}^0(\mathfrak{k}^\perp)$. En composant par cet isomorphisme on construit donc un caractère pour l'algèbre de réduction qui dépend *a priori* du choix de la polarisation \mathfrak{b} en f .³⁹

³⁹On peut se demander si ce caractère est indépendant du choix du supplémentaire de $\mathfrak{k} + \mathfrak{b}$ dans \mathfrak{g} .

Remarque importante : Dans le cas d'une sous-algèbre \mathfrak{h} , cette méthode fournira un caractère de l'algèbre de réduction $H_\epsilon^0(\mathfrak{h}^\perp)$ pour peu que l'on ait $(H \cap B) \cdot f$ ouvert dans $f + (\mathfrak{h} + \mathfrak{b})^\perp$. Dans ce cas $H \cdot f$ est lagrangien dans $G \cdot f$ et on retrouve une condition évoquée dans [11] pour la commutativité de l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur G/H .

6.2 Indépendance par rapport aux choix de la polarisation

La méthode consiste à considérer une variation à 8-couleurs des diagrammes. On retrouve aux bords les diagrammes à 4-couleurs, ce qui permet l'interpolation entre les deux situations.

6.2.1 Construction de la forme à 8-couleurs

Proposition 20. *Il existe une 1-forme à 8-couleurs qui interpole les 1-formes à 4-couleurs.*

Preuve : Le reste de ce paragraphe est consacré à la construction de cette 1-forme à 8-couleurs.

Considérons la demie-bande

$$\square := \left\{ \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Notons \sqsubseteq_i , $i = 1, 2, 3$, les trois composantes de son bord :

$$\begin{aligned} \sqsubseteq_1 &:= \left\{ \mathbf{x} \in \square : y = -\frac{\pi}{2} \right\}, \\ \sqsubseteq_2 &:= \left\{ \mathbf{x} \in \square : x = 0 \right\}, \\ \sqsubseteq_3 &:= \left\{ \mathbf{x} \in \square : y = \frac{\pi}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Sur la compactification de l'espace de configurations $C_2(\square)$, on considère l'involution

$$\begin{aligned} p: C_2(\square) &\rightarrow C_2(\square) \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &\mapsto (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1). \end{aligned}$$

On veut définir huit 1-formes fermées $\theta_{j_1 j_2 j_3}$, $j_i \in \{1, 2\}$, sur $C_2(\square)$ ayant les propriétés suivantes :

1. $\theta_{j_1 j_2 j_3}$ s'annulent quand \mathbf{x}_{j_i} approche de \sqsubseteq_i , $i = 1, 2, 3$;
2. sur la composante de bord correspondant au rapprochement de \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 tout en restant à l'intérieur de \square , $\theta_{j_1 j_2 j_3}$ s'identifie à la forme volume normalisée et invariante sur S^1 ;
3. pour $j_i = 1$ ($j_i = 2$), $i = 1, 2, 3$, sur la composante de bord correspondant au rapprochement de \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 près de l'intérieur de \sqsubseteq_i , $\theta_{j_1 j_2 j_3}$ ($p^* \theta_{j_1 j_2 j_3}$) est la 1-forme de Kontsevich;
4. sur le bord correspondant au rapprochement de \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 près d'un coin, $\theta_{j_1 j_2 j_3}$ est la 1-forme à 4-couleurs de Cattaneo-Felder § 1.6.1.

Cas $j_1 \neq j_3$: Soit θ la forme tautologique sur $C_2(\mathbb{R}^2)$ correspondant à la métrique Euclidienne ; c'est à dire, $\theta := \phi^* \omega$, où ω est la 1-forme volume normalisée et invariante sur S^1 et

$$\begin{aligned} \phi: C_2(\mathbb{R}^2) &\rightarrow S^1 \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &\mapsto \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|} \end{aligned}$$

Soit $\tau_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($i = 1, 2, 3$) l'involution correspondant à la réflexion par rapport aux droites supportant \sqsubseteq_i ; c'est à dire :

$$\begin{aligned} \tau_1(x, y) &= (x, -\pi - y), \\ \tau_2(x, y) &= (-x, y), \\ \tau_3(x, y) &= (x, \pi - y). \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$ et $\tau_3 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_3$.

Soit $C_2(\mathbb{R}^2)'$ le sous-ensemble de $C_2(\mathbb{R}^2)$ défini par $\mathbf{x}_1 \neq \tau_i(\mathbf{x}_2)$ pour $i = 1, 2, 3$. Observons que l'on a $C_2(\square) \subset C_2(\mathbb{R}^2)'$. Écrivons τ_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$) pour l'action de τ_i sur la composante j de $C_2(\mathbb{R}^2)'$; c'est à dire :

$$\begin{aligned} \tau_{i1}: C_2(\mathbb{R}^2)' &\rightarrow C_2(\mathbb{R}^2)' \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &\mapsto (\tau_i(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2) \\ \tau_{i2}: C_2(\mathbb{R}^2)' &\rightarrow C_2(\mathbb{R}^2)' \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &\mapsto (\mathbf{x}_1, \tau_i(\mathbf{x}_2)) \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a

$$\begin{aligned} \tau_{1j_1} \circ \tau_{2j_2} &= \tau_{2j_2} \circ \tau_{1j_1} & \forall j_1, j_2, \\ \tau_{3j_3} \circ \tau_{2j_2} &= \tau_{2j_2} \circ \tau_{3j_3} & \forall j_1, j_3, \\ \tau_{1j_1} \circ \tau_{3j_3} &= \tau_{3j_3} \circ \tau_{1j_1} & \forall j_1 \neq j_3. \end{aligned}$$

Alors, si on fixe j_1, j_2, j_3 avec $j_1 \neq j_3$, le groupe engendré par $\tau_{1j_1}, \tau_{2j_2}, \tau_{3j_3}$ est abélien et fini (d'ordre 8). Enfin, on définit

$$\theta_{j_1 j_2 j_3} = \iota_{C_2(\square)}^* \left(\sum_{a,b,c=0,1} (-1)^{a+b+c} (\tau_{1j_1}^*)^a (\tau_{2j_2}^*)^b (\tau_{3j_3}^*)^c \iota_{C_2(\mathbb{R}^2)'}^* \theta \right),$$

où ι_\bullet^* est la restriction à \bullet . Il n'est pas difficile de vérifier que les formes $\theta_{j_1 j_2 j_3}$, $j_1 \neq j_3$, satisfont aux conditions souhaitées.

Cas $j_1 = j_3$: La construction précédente ne s'applique pas dans le cas $j_1 = j_3$ car τ_1 et τ_3 ne commutent pas. Nous avons besoin d'une autre construction.

Soit S la bande $\{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$. Sur (l'intérieur de) S on considère la métrique

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\cos^2 y},$$

qui approche la métrique de Poincaré sur chaque composante de bord. Les géodésiques sont soit des lignes verticales soit des courbes de la forme sui-

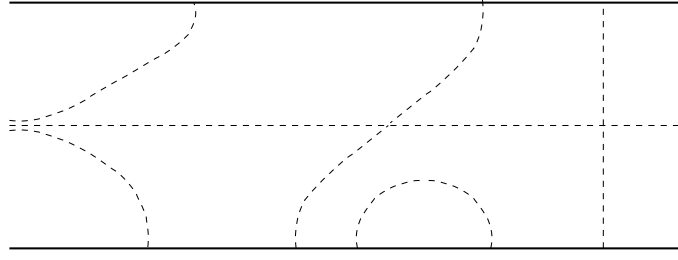


FIG. 40 – Géodésiques dans la bande

vante

$$\sin y = Ae^x + Be^{-x},$$

où A et B sont des paramètres.

Remarquons qu'il existe une et une seule géodésique passant par deux points distincts de S . On définit la fonction d'angles $\phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ comme l'angle entre la géodésique verticale passant par \mathbf{x}_1 et la géodésique joignant \mathbf{x}_1 à \mathbf{x}_2 . On définit ensuite ϑ comme $d\phi/(2\pi)$. Alors ϑ est une 1-forme fermée sur $C_2(S)$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

1. ϑ s'annule quand \mathbf{x}_1 s'approche du bord de S ;
2. sur la composante de bord correspondant au rapprochement de \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 tout en restant dans l'intérieur de S , ϑ s'identifie à la forme volume normalisée et invariante sur S^1 ;
3. sur la composante de bord correspondant au rapprochement de \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 près du bord de S , ϑ est la 1-forme de Kontsevich.

Soit $\sigma : S \rightarrow S$ l'involution correspondant à la réflexion par rapport à $x = 0$: c'est à dire, $\sigma(x, y) = (-x, y)$. Soit $C_2(S)'$ le sous-ensemble de $C_2(S)$ défini par $\mathbf{x}_1 \neq \sigma(\mathbf{x}_2)$. Remarquons que l'on a $C_2(\square) \subset C_2(S)'$. On écrit σ_j ($j = 1, 2$) pour l'action de σ sur la composante j de $C_2(S)'$; c'est à dire :

$$\begin{aligned} \sigma_1 : C_2(S)' &\rightarrow C_2(S)' \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &\mapsto (\sigma(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2) \\ \sigma_2 : C_2(S)' &\rightarrow C_2(S)' \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &\mapsto (\mathbf{x}_1, \sigma(\mathbf{x}_2)) \end{aligned}$$

Enfin, on définit

$$\theta_{1j1} = \iota_{C_2(\square)}^* \left(\sum_{a=0,1} (-1)^a (\sigma_j^*)^a \iota_{C_2(S)'}^* \vartheta \right),$$

et

$$\theta_{2j2} = p^* \theta_{1,3-j,1}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que les 1-formes $\theta_{j_1 j_2 j_3}$, $j_1 = j_3$, satisfont aux conditions désirées.

6.2.2 Polarisation en position d'intersection normale

On utilise la forme à 8-couleurs dans le cas de 3 sous-algèbres $\mathfrak{k}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ en position d'intersections normales. C'est à dire il faut que l'on ait (au choix une des conditions impliquant les deux autres) :

$$\mathfrak{k} \cap (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{k} \cap \mathfrak{b}_2$$

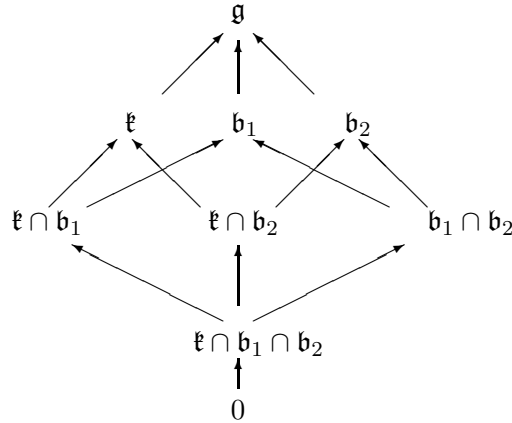
ou

$$\mathfrak{b}_1 \cap (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$$

ou

$$\mathfrak{b}_2 \cap (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{b}_1.$$

On peut alors trouver une base de \mathfrak{g} qui soit adaptée aux différentes intersections. Dans ce cas, on peut adapter la forme à 8-couleurs en fonction des supplémentaires des intersections possibles (dans le diagramme ci-dessous, cela correspond à regrouper les supplémentaires en fonction des sommets d'arrivées) :



Proposition 21. Soient $f \in \mathfrak{k}^\perp$ et $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ deux polarisations en f telle que $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{k}$ soient en position d'intersections normales. Alors le caractère construit est indépendant du choix de la polarisation (une fois choisi un supplémentaire de \mathfrak{k} adapté à \mathfrak{b}_1 et \mathfrak{b}_2).

Preuve : Si les deux polarisations sont en positions d'intersections normales on choisit un supplémentaire de \mathfrak{k} adapté aux deux polarisations \mathfrak{b}_1 et \mathfrak{b}_2 simultanément. On dispose donc d'une algèbre de déformation $H_{\epsilon, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2}^0(\mathfrak{k}^\perp)$ (isomorphe à l'algèbre $S(\mathfrak{p})^\mathfrak{k}[[\epsilon]]$).

Considérons la forme à 8-couleurs et les diagrammes de Kontsevich colorés. Sur la variété de configurations des points dans une demi-bande (cf. Fig. 41), plaçons aux coins les fonctions 1 et sur le coté borné la fonction $P \in H_{\epsilon, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2}^0(\mathfrak{k}^\perp)$. Les contributions de tous les diagrammes (pondérés par ces coefficients à 8-couleurs) représentent une fonction polynomiale sur $f + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^\perp$. Le résultat ne dépend pas de la position de la fonction P . Regardons les positions limites pour obtenir le résultat cherché.

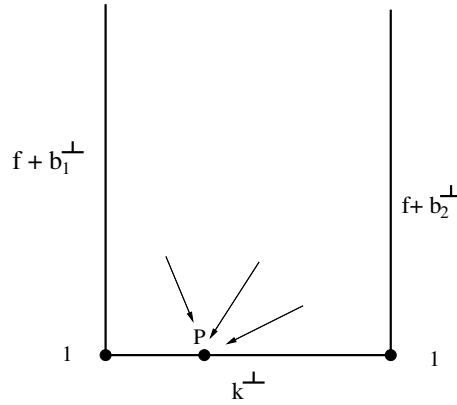


FIG. 41 – Indépendance grace la forme à 8-couleurs

En s'approchant du coin de droite, on obtient grace aux concentrations internes un scalaire $1 \star_1 P$ (et donc il n'y a pas de contributions pour les concentrations externes). On retrouve alors le caractère de la section précédente :

$$H_{\epsilon, \mathfrak{b}_1}^0(\mathfrak{k}^\perp) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \mapsto 1 \star_1 P.$$

Lorsque la fonction P s'approche de l'autre coin on trouve le caractère

$$H_{\epsilon, \mathfrak{b}_2}^0(\mathfrak{k}^\perp) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \mapsto P \star_2 1.$$

On en déduit que les deux caractères construits sont identiques. ■

Remarque : Cette construction fonctionne si on choisit comme sous-variétés co-isotropes $f_1 + \mathfrak{b}_1^\perp$ et $f_2 + \mathfrak{b}_2^\perp$, avec $f_1, f_2 \in \mathfrak{k}^\perp$ et la condition d'intersection :

$$(f_1 + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_1)^\perp) \cap (f_2 + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_2)^\perp) \neq \emptyset.$$

Si l'intersection ci-dessus est non vide, alors f_1 et f_2 sont dans la même K -orbite pour peu que la condition de Pukanszky soit vérifiée. En effet si la condition de Pukanszky (cf. § 2.5) est vérifiée on a

$$(K \cap B_1) \cdot f_1 = f_1 + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_1)^\perp \quad \text{et} \quad (K \cap B_1) \cdot f_2 = f_2 + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_2)^\perp.$$

Alors f_1 et f_2 sont conjuguées par K dans \mathfrak{k}^\perp .

6.3 Applications au cas des polarisations σ -stable

On applique la construction ci-dessus dans le cas des paires symétriques qui admettent de manière générique des polarisations σ -stables pour les formes linéaires dans \mathfrak{k}^\perp .

6.3.1 Exemples classiques

Les paires symétriques pour lesquelles on peut construire des polarisations σ -stables sont proches heuristiquement des algèbres de Lie. Voici quelques exemples (cf. [32, 35]).

1. Les petites paires symétriques comme dans § 2.4,
2. le cas de paires symétriques nilpotentes,
3. le cas des paires symétriques de Alekseev-Meinrenken,
4. le cas des algèbres de Lie considérées comme des espaces symétriques,
5. les paires symétriques de Takiff $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \otimes T$.

6.3.2 Indépendance du caractère

Lorsque l'on sait construire des polarisations σ -stables, les supplémentaires s'imposent pour $\mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{k})$ ainsi que $\mathfrak{g}/(\mathfrak{k} + \mathfrak{b})$; on choisit $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cap \mathfrak{b}$ (un supplémentaire de $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{b}$ dans \mathfrak{p}). L'algèbre de réduction pour \mathfrak{k}^\perp est alors tout simplement $S(\mathfrak{p})^\mathfrak{k}$ munie du produit de \star_{CF} , car tous les espaces considérés sont σ -stables.

Différents choix de polarisation σ -stables vont être en position d'intersection normale. Ainsi d'après la proposition 21 le caractère construit est indépendant de la polarisation σ -stable; notons le

$$P \mapsto \gamma(P)(f).$$

Par ailleurs cette construction est équivariante par rapport à l'action linéaire de K , donc le caractère construit ne dépend que de la K -orbite de f . On en déduit la proposition suivante (cf. [32, 35])

Proposition 22. *S'il existe génériquement des polarisations σ -stable, alors la construction ci-dessus définit un caractère de $(S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}, \star_{CF})$. Ce caractère ne dépend pas du choix de la polarisation σ -stable. Il est constant sur la K -orbite et polynomial en f .*

Preuve : Le caractère ne dépend pas du choix de la polarisation σ -stable, car on a automatiquement une situation à croisements normaux et l'algèbre de réduction ne dépend pas des choix des supplémentaires car ils sont pris dans \mathfrak{p} .

La dépendance polynomiale en \mathfrak{b} est claire, tant que l'on reste sur des ouverts où f admet des polarisations génériques. On applique la méthode de Duflo-Conze [12], pour conclure que l'ensemble des (f, \mathfrak{b}) avec $f \in \mathfrak{k}^\perp$ et \mathfrak{b} sous-algèbre σ -stable subordonnée à f et de dimension générique, tels que $1 \star P$ soit scalaire dans $f + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b})^\perp$ forme un ensemble rationnel. On conclut alors que le caractère est polynomial et K -invariant. ■

6.3.3 Isomorphisme de Rouvière

L'homomorphisme γ est alors un isomorphisme de $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ muni du produit \star_{CF} sur $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ muni du produit standard, car le terme de plus haut degré est clairement l'identité.

En fait on a le résultat plus fort suivant (démontré dans [35] par la méthode des orbites, voir aussi [1, 34]).

Théorème 7. *Dans le cas paires symétriques, avec polarisations génériques σ -stables, l'homomorphisme γ vaut l'identité. En conséquence l'application⁴⁰*

$$P \mapsto \beta \left(\partial(J^{\frac{1}{2}})P \right)$$

est un isomorphisme d'algèbres de $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ sur $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$.

Preuve : Soit $f \in \mathfrak{k}^\perp$, \mathfrak{b} polarisation σ -stable en f . On considère dans le diagramme de la bi-quantification la situation du triplet : $f + \mathfrak{b}^\perp$, \mathfrak{k}^\perp et \mathfrak{g}^* . On place les fonctions 1 aux deux coins et la fonction $P \in S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ sur l'axe horizontal (cf. Fig. 42).

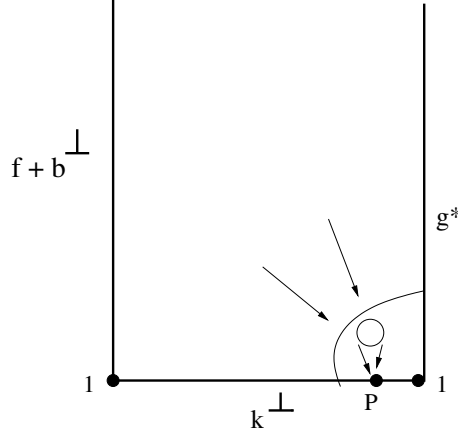


FIG. 42 – Calcul du caractère

Lorsque P se rapproche du coin $f + \mathfrak{b}^\perp$ on retrouve le caractère recherché.

Lorsque P se rapproche du coin correspondant à \mathfrak{g}^* , on retrouve dans les strates qui se concentrent (sur l'axe horizontal) la situation des paires symétriques à savoir $P \star 1 = B(P)$, avec B l'opérateur correspondant aux roues pures sur l'axe de \mathfrak{k}^\perp (cf. §4.1.2).

Considérons les contributions des graphes extérieurs. Les arêtes qui arrivent sur le coin sont colorées par les couleurs $+++$ ou $-++$. En fait pour la fonction d'angle à 8-couleurs, on a $\Phi_{-++}(p, q) = 0$ si q est dans le coin. Par conséquent les arêtes qui arrivent sur le coin sont d'une seule couleur : $+++$. Cette couleur correspond à une dérivée dans la direction $(\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cap \mathfrak{b})^* = (\mathfrak{k} + \mathfrak{b})^\perp$. Or la fonction que l'on dérive est $B(P)$ qui est \mathfrak{k} -invariante et donc constante sur $f + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b})^\perp$. De plus l'opérateur est évalué en $\xi \in f + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b})^\perp$, par conséquent ces dérivées sont nulles. Le caractère construit dans la proposition 22 vaut donc $B(P)(f)$.

La série B est universelle et s'écrit sous la forme :

$$\exp \left(\sum w_n \text{tr}_{\mathfrak{p}}(\text{ad} X)^{2n} \right)$$

avec w_n des constantes universelles. On en déduit que l'application de

$$P \mapsto B(P)$$

de $(S(\mathfrak{p})^\mathfrak{k}, \star_{CF} = \sharp_{Rou})$ sur $(S(\mathfrak{p})^\mathfrak{k}, \cdot)$ est un isomorphisme d'algèbres pour les paires symétriques qui admettent génériquement des polarisations σ -stables. Pour terminer la preuve du théorème il suffit de montrer que l'on a $B = 1$.

⁴⁰Ici β désigne la symétrisation.

■

Proposition 23. *La série universelle $B(X)$ qui intervient pour les paires symétriques vaut 1.*

Preuve : D'après [35] lorsque génériquement on sait construire des polarisations σ -stable, le produit de Rouvière (qui vaut aussi le star-produit \star_{CF}) et le produit standard coïncident sur $S(\mathfrak{p})^\natural$.

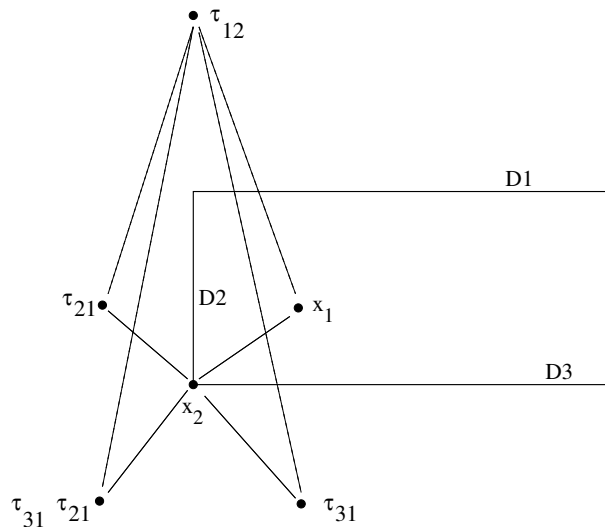


FIG. 43 – La fonction d'angle $\Phi_{-++}(x_1, x_2)$ est nulle quand x_2 est sur le coin

Si on avait $B \neq 1$ alors on disposerait d'un isomorphisme d'algèbres pour $S(\mathfrak{p})^\natural$ muni du produit standard (pour ce genre de paires symétriques) et par conséquent il existerait $n > 0$ tel que $\text{tr}_{\mathfrak{p}}(\text{ad}X)^{2n}$ serait une dérivation de $S(\mathfrak{p})^\natural$ ce qui n'est pas vrai sur des exemples ⁴¹.

La série universelle B vaut 1, ce qui justifie la formule pour l'écriture des opérateurs différentiels invariants en coordonnées exponentielles du § 4.3.

■

⁴¹Par exemple pour $sl(2)$ considérée comme paire symétrique

Table des figures

1	Graphe type intervenant dans le calcul de \mathcal{U}_4	18
2	Graphe intervenant dans le calcul F_π	21
3	Graphe intervenant dans le calcul A_π à l'ordre 1	22
4	Construction de la fonction d'angle à 4-couleurs	32
5	Fonction d'angle à 4-couleurs	32
6	Diagramme intervenant dans le 1-vecteur avec origine 1	34
7	Diverses strates pour la compatibilité de l'action à droite en cohomologie	36
8	Graphe de type Bernoulli quand aucune arête ne part de l'axe réel vers le diagramme	40
9	Graphe de type roue lorsqu'aucune arête de part de l'axe réel vers le diagramme	41
10	Graphe de type roue avec une arête partant à l'infini	41
11	Graphe n'intervenant pas dans la différentielle pour les formes	43
12	Graphe pouvant intervenir dans le calcul A_π pour les formes dans le cas linéaire	43
13	Diagramme type Bernoulli avec sommet dans \mathfrak{n}_+	46
14	Diagramme type roue attachée Bernoulli avec roue colorée de manière uniforme	46
15	Roue type contribuant dans $E(X, Y)$	49
16	Graphe intervenant dans le calcul du star-produit dans l'espace $H^\bullet(\mathfrak{k}, S(\mathfrak{p}))$	50
17	Roue dans un sens et dans l'autre	51
18	Roue dans un sens et dans l'autre lorsque tous les X_i sont dans \mathfrak{k}	52
19	Graphe $[X, [X, [X, [Y]]]]$	54
20	Calcul du poids du graphe $[X, [X, [X, [Y]]]]$	54
21	Graphe $[X, [Y, [X, [Y]]]]$	54
22	Calcul du poids du graphe $[X, [Y, [X, [Y]]]]$	55
23	Roue $[X, Y], [X, Y]$	56
24	Roue de taille 3 attachée à $[X, Y], [X, Y], [X, Y]$	56
25	Roue de taille 3 attachée à $[X, Y], X, Y$	57
26	Roue de taille 4 attachée à X, Y, X, Y	58
27	Roue de taille 4 attachée à X, X, X, Y	59
28	Roue intervenant dans le calcul de $D(X, Y)$	62
29	Contributions des roues pures sur les axes	68
30	Fonctions d'angles pour les espaces symétriques	74
31	Bi-quantification définissant le diagramme d'Harish-Chandra	78
32	Graphe intervenant dans le calcul de la différentielle pour $n = 3$	81
33	Exemple de graphe intervenant dans l'espace de réduction horizontal . .	82
34	Exemple de graphe intervenant l'opérateur de transmutation horizontal .	83
35	Exemple de graphe intervenant l'opérateur de $(DU_\pi(v))_1$	90
36	Exemple de graphe intervenant l'opérateur de D_1 : Bernoulli fermé par v	91
37	Exemple de graphe intervenant l'opérateur de D_1 : roue attachée à un Bernoulli attaché à v	91

38	Exemple de graphe intervenant l'opérateur de D_1 : roue pure attachée à v	91
39	Graphe de type Bernoulli non fermé	92
40	Géodésiques dans la bande	97
41	Indépendance grace la forme à 8-couleurs	99
42	Calcul du caractère	102
43	La fonction d'angle $\Phi_{-++}(x_1, x_2)$ est nulle quand x_2 est sur le coin . . .	103

Références

- [1] Alekseev, A. ; Meinrenken, E., Lie theory and the Chern-Weil homomorphism. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **38** (2005), no. 2, 303–338.
- [2] Alekseev, A. ; Meinrenken, E., On the Kashiwara-Vergne conjecture. *Invent. Math.* **164** (2006), no. 3, 615–634.
- [3] Andler, M. ; Sahi, S. ; Torossian, C., Convolution of invariant distributions : proof of the Kashiwara-Vergne conjecture. *Lett. Math. Phys.* **69** (2004), 177–203.
- [4] Arnal, D. ; Manchon, D. ; Masmoudi, M., Choix des signes pour la formalité de Kontsevich. *Pacific J. Math.* **203** (2002), 23–66.
- [5] Baklouti, A. ; Fujiwara, H., Commutativité des opérateurs différentiels sur l'espace des représentations restreintes d'un groupe de Lie nilpotent. (French) [Commutativity of differential operators on the space of restricted representations of a nilpotent Lie group] *J. Math. Pures Appl.* (9) **83** (2004), no. 1, 137–161.
- [6] Baklouti, A. ; Ludwig, J. Invariant differential operators on certain nilpotent homogeneous spaces. *Monatsh. Math.* **134** (2001), no. 1, 19–37.
- [7] Cattaneo, A. S. ; Felder, G., Coisotropic submanifolds in Poisson geometry and branes in the Poisson sigma model. *Lett. Math. Phys.* **69** (2004), 157–175.
- [8] Cattaneo, A. S. ; Felder, G., *Relative formality theorem and quantisation of coisotropic submanifolds*. 31 pages. math.QA/0501540, to be published in *Adv. Math.*
- [9] Cattaneo, A.S. ; Keller, B. ; Torossian, C. ; Bruguières, A., *Déformation, quantification, théorie de Lie*. Collection Panoramas et Synthèse no. **20**, SMF, 2005.
- [10] Corwin, L. J. ; Greenleaf, F. P. Commutativity of invariant differential operators on nilpotent homogeneous spaces with finite multiplicity. *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992), no. 6, 681–748.
- [11] Duflo, M., in *Open problems in representation theory of Lie groups*, Conference on *Analysis on homogeneous spaces*, (T. Oshima editor), August 25-30, Kataka, Japon, 1986.
- [12] Duflo, M., Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **10** (1977), 107–144.
- [13] Duflo, M., Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série A* **289** (1979), 135–137.
- [14] Fujiwara, H. ; Lion, G. ; Magneron, B. ; Mehdi, S., A commutativity criterion for certain algebras of invariant differential operators on nilpotent homogeneous spaces. *Math. Ann.* **327** (2003), no. 3, 513–544.
- [15] Iserles A., Expansions that grow on trees. *Notices Amer. Math. Soc.* **49** (2002), no. 4, 430–440.

- [16] Iserles A., Solving ordinary differential equation by exponentials of iterated commutators. *Numerische Mathematik*. **45** (1984), 183–199.
- [17] Kashiwara, M. ; Vergne, M. The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions. *Inventiones Math.* **47** (1978), 249–272.
- [18] Knop, F., A Harish-Chandra homomorphism for reductive group actions. *Ann. of Math.* **140** (1994), no. 2, 253–288.
- [19] Maxim Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds, I*, Preprint of the IHÉS, October 1997, q-alg/9709040 published in *Lett. Math. Phys.* **66** (2003), no. 3, 157–216.
- [20] Koornwinder, Tom H., *Invariant differential operators on nonreductive homogeneous spaces*. math.RT/0008116 11 pages (preprint 1981, not published).
- [21] Lichnerowicz, A., Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série A*, **257** (1963), 3548–3550.
- [22] Magnus, W., On the exponential solution of differential equations for a linear operator. *Comm. Pure Appl. Math.* **7** (1954) 649–673.
- [23] Manchon, D., Poisson bracket, deformed bracket and gauge group actions in Kontsevich deformation quantization. *Letter in Math. Physics*, **52** (2001), pages 301–310.
- [24] Pevzner, M. ; Torossian, C., Isomorphisme de Duflo et la cohomologie tangentielle. *J. Geom. Phys.* **51** (2004), no. 4, 487–506.
- [25] Rybnikov, L. G., Structure of the center of the algebra of invariant differential operators on certain Riemannian homogeneous spaces. *Transform. Groups* **9** (2004), no. 4, 381–397.
- [26] Rouvière, F., Espaces symétriques et méthode de Kashiwara-Vergne. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **19** (1986), no. 4, 553–581.
- [27] Rouvière, F., Invariant analysis and contractions of symmetric spaces. I. *Compositio Math.* **73** (1990), no. 3, 241–270.
- [28] Rouvière, F., Invariant analysis and contractions of symmetric spaces. II. *Compositio Math.* **80** (1991), no. 2, 111–136.
- [29] Rouvière, F., Une propriété de symétrie des espaces symétriques. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* **313** (1991), no. 1, 5–8.
- [30] Rouvière, F., Fibrés en droites sur un espace symétrique et analyse invariante. *J. Funct. Anal.* **124** (1994), no. 2, 263–291.
- [31] Shoikhet, B., *On the Duflo formula for L_∞ -algebras and Q -manifolds*. math.QA/9812009.
- [32] Torossian, C., Sur la conjecture combinatoire de Kashiwara-Vergne. *J. Lie Theory* **12** (2002), no. 2, 597–616.
- [33] Torossian, C., Méthodes de Kashiwara-Vergne-Rouvière pour les espaces symétriques. in *Noncommutative harmonic analysis*, 459–486, Progr. Math., **220**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.

- [34] Torossian, C., Opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques. I et II . *J. Funct. Anal.* **117** (1993), no. 1, 118–173 et 174–214.
- [35] Torossian, C., Paires symétriques orthogonales et isomorphisme de Rouvière. *J. Lie Theory* **15** (2005), no. 1, 79–87.
- [36] Vergne, M., Le centre de l’algèbre enveloppante et la formule de Campbell-Hausdorff. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* **329** (1999), no. 9, 767–772.